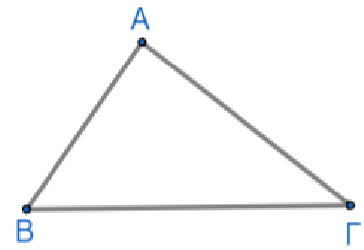
ΤΡΙΓΩΝΑ

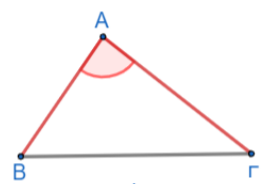
Στοιχεία τριγώνου

Το τρίγωνο έχει

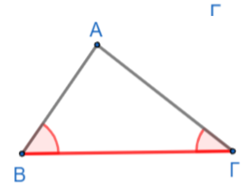


- <u>Κορυφές</u>: Α, Β και Γ
- <u>Πλευρές:</u> ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ
- <u>Γωνίες:</u> $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma$(ή απλώς $\widehat{\mathrm{B}}$), $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B}$ (ή απλώς $\widehat{\Gamma}$) και $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma$ (ή απλώς $\widehat{\mathrm{A}}$)

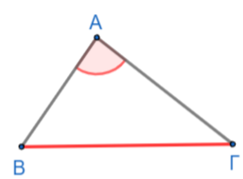
Η γωνία $\widehat{\mathrm{A}}$ λέγεται «περιεχόμενη» γωνία των πλευρών ΑΒ και ΑΓ.



Οι γωνίες $\widehat{\mathrm{B}}$ και $\widehat{\Gamma}$ λέγονται «προσκείμενες» γωνίες της πλευράς ΑΒ.



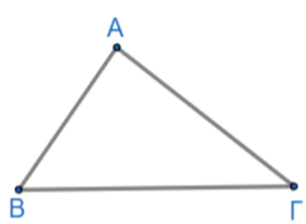
Η γωνία $\widehat{\mathrm{A}}$ βρίσκεται «απέναντι» από την πλευρά ΒΓ.



Είδη τριγώνων

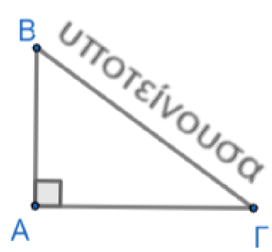
Ανάλογα με το είδος των γωνιών τους, τα τρίγωνα χωρίζονται σε:

<u>Οξυγώνιο</u>



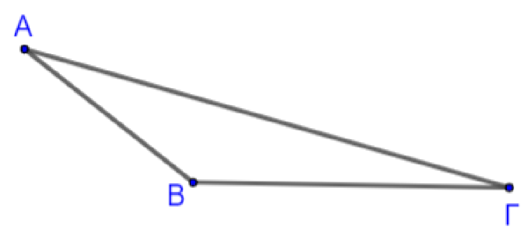
Έχει τρεις οξείες γωνίες.

<u>Ορθογώνιο</u>



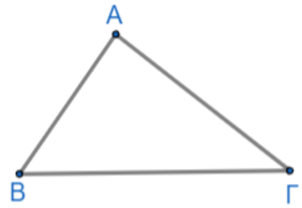
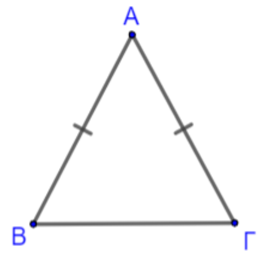
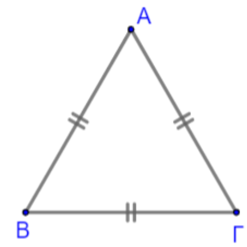
Έχει μια ορθή γωνία.

<u>Αμβλυγώνιο</u>



Έχει μια αμβλεία γωνία.

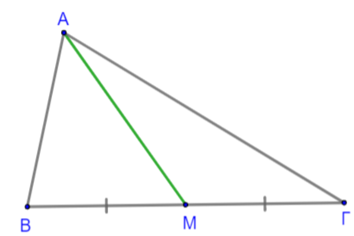
Ανάλογα με το είδος των πλευρών τους, τα τρίγωνα χωρίζονται σε:

<u>Σκαληνό</u>	<u>Ισοσκελές</u>	<u>Ισόπλευρο</u>
		
Έχει άνισες πλευρές.	Έχει δύο ίσες πλευρές.	Έχει τρεις ίσες πλευρές.

Δευτερόντα στοιχεία τριγώνου

<u>Διάμεσος</u>

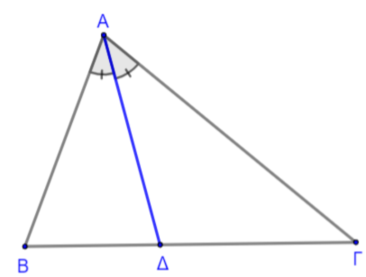
Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς.



Εφόσον Μ είναι το μέσο της ΒΓ, έχουμε ΒΜ=ΜΓ.

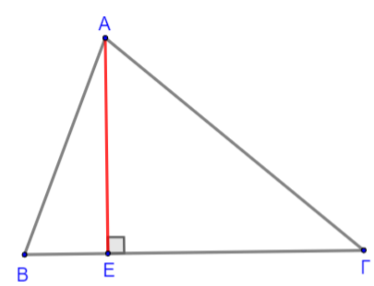
<u>Διχοτόμος</u>

Το ευθύγραμμο τμήμα που φέρεται από μια κορυφή προς την απέναντι πλευρά και διχοτομεί τη γωνία.



<u>Ύψος</u>

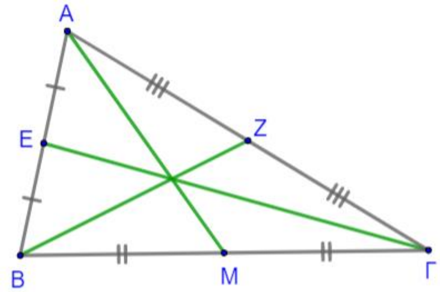
Το ευθύγραμμο τμήμα που φέρεται από μια κορυφή κάθετα στην απέναντι πλευρά.



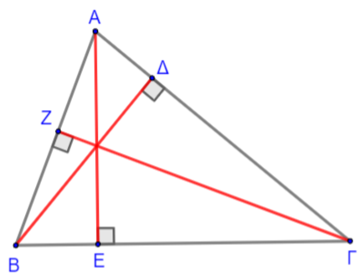
Το σημείο Ε ονομάζεται «προβολή του Α στην ΒΓ» ή και «ίχνος της καθέτου ΑΒ στη ΒΓ».

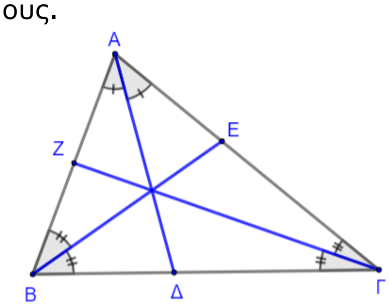
Παρατηρήσεις

- Κάθε τρίγωνο έχει τρεις διαμέσους (μία από κάθε κορυφή προς το μέσος της απέναντι πλευράς.

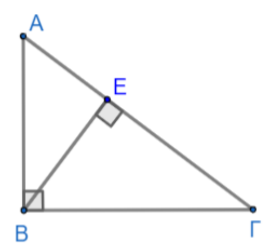


- Όμοια, κάθε τρίγωνο έχει τρία ύψη και τρεις διχοτόμους.

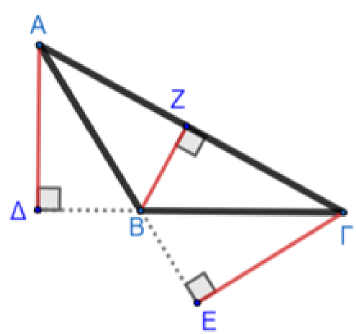




- Στο ορθογώνιο τρίγωνο, οι κάθετες πλευρές είναι τα δύο από τα τρία ύψη.

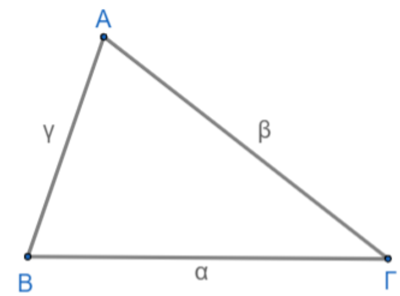


- Στο αμβλυγώνιο τρίγωνο, τα δύο από τα τρία ύψη βρίσκονται εκτός του τριγώνου.



Συντομογραφίες

Η πλευρά ΒΓ βρίσκεται απέναντι από τη γωνία $\widehat{\mathrm{A}}$ και συμβολίζεται με α.
Η πλευρά ΑΒ βρίσκεται απέναντι από τη γωνία $\widehat{\Gamma}$ και συμβολίζεται με γ.
Η πλευρά ΑΓ βρίσκεται απέναντι από τη γωνία $\widehat{\mathrm{B}}$ και συμβολίζεται με β.



Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά α συμβολίζεται με μ_α.

Η διχοτόμος που αντιστοιχεί στην πλευρά α συμβολίζεται με δ_α.

Το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά α συμβολίζεται με υ_α.

Επίσης, συνήθως συμβολίζουμε με τ την *ημιπερίμετρο* του τριγώνου. Δηλαδή $\tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ και επομένως η περίμετρος του τριγώνου συμβολίζεται με 2τ.

Ισότητα τριγώνων

Λέμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα αν μπορούν, με κατάλληλη μετατόπιση ή περιστροφή, να ταυτιστούν.

Συνεπώς, δύο τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν τις πλευρές και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.

Επίσης, σε δύο <u>ίσα</u> τρίγωνα, απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα.

1ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π-Γ-Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν
- δύο πλευρές ίσες μία προς μία

και
- την περιεχόμενη γωνία ίση

τότε είναι ίσα τρίγωνα.

2ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων (Γ-Π-Γ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν
- μία πλευρά ίση

και
- τις προσκείμενες γωνίες ίσες μία προς μία

τότε είναι ίσα τρίγωνα.

3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π-Π-Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα τρίγωνα.

Σημαντικά πορίσματα

Στο ισοσκελές τρίγωνο

α) οι γωνίες της βάσης είναι ίσες

και β) η διχοτόμος που φέρουμε από την κορυφή είναι διάμεσος και ύψος.

Οι γωνίες του ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.

Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, *αν και μόνο αν* οι χορδές είναι ίσες.

Παρατήρηση

Το θεώρημα ισχύει και για τα τόξα δύο **ισων** κύκλων. Τα τόξα άνισων κύκλων δεν είναι δυνατόν να συγκριθούν.

Θεώρημα(Χαρακτηριστική ιδιότητα της μεσοκαθέτου)

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Και αντίστροφα:

Αν ένα σημείο ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος, τότε το σημείο αυτό ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος.

Παρατήρηση

Για να αποδείξουμε ότι μια ευθεία είναι η μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος, πρέπει να πάρουμε δύο σημεία της ευθείας και για καθένα από αυτά να αποδείξουμε ότι ισαπέχει από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος.

Στρατηγική

Για να αποδείξουμε ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα ή δύο γωνίες είναι ίσα, συγκρίνουμε δύο τρίγωνα στα οποία ανήκουν.

Στρατηγική

Για να αποδείξουμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα, αρκεί να βρούμε τρία ίσα στοιχεία τους, σύμφωνα με τα κριτήρια.

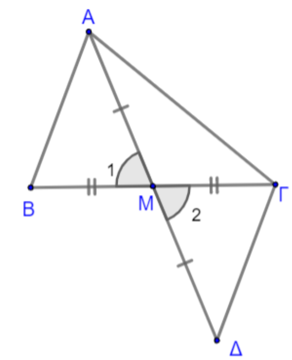
Στρατηγική

Ένα τρίγωνο έχει 6 κύρια στοιχεία (3 πλερές και 3 γωνίες). Αφού αποδείξουμε ότι είναι ίσα, τότε αυτόματα παίρνουμε και τρία νέα δεδομένα (τρεις νέες ισότητες), αφού θα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα.

Στρατηγική

Αν σε ένα τρίγωνο προεκτείνουμε τη διάμεσο κατά ίσο τμήμα, δημιουργούνται δύο ίσα τρίγωνα. Έτσι παίρνουμε στοιχεία τα οποία μπορεί να διευκολύνουν την επίλυση της άσκησης.

Απόδειξη
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ.
Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά ίσο τμήμα ΜΔ.
Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΜΓΔ είναι ίσα, διότι:



- ΑΜ=ΜΔ (υπόθεση)
- ΒΜ=ΜΓ (εφόσον το Μ είναι το μέσο της ΒΓ)
- $Μ_1=Μ_2$ (ως κατακορυφήν γωνίες)

Έτσι, έχουμε: ΑΒ=ΓΔ, $\hat{Β} = Β\hat{Γ}Δ$ και $Β\hat{Α}Μ = Α\hat{Δ}Γ$.

Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους

1. Δύο ισοσκελή τρίγωνα με ίσες περιμέτρους είναι ίσα.
2. Δύο ισόπλευρα τρίγωνα με ίσες περιμέτρους είναι ίσα.
3. Η διάμεσος χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ίσα τρίγωνα.
4. Η διχοτόμος χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ίσα τρίγωνα.
5. Η διχοτόμος χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισογώνια τρίγωνα
6. Υπάρχει τρίγωνο στο οποίο κάποια πλευρά του είναι ταυτόχρονα και ύψος.
7. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και μια γωνία ίση, είναι ίσα.
8. Στο ισοσκελές τρίγωνο κάθε ύψος είναι και διάμεσος και διχοτόμος.
9. Στο ισόπλευρο τρίγωνο κάθε ύψος είναι και διάμεσος και διχοτόμος.
10. Σε ίσες χορδές δύο κύκλων αντιστοιχούν ίσα τόξα.
11. Το κέντρο του κύκλου απέχει εξίσου από όλες τις χορδές του.
12. Δύο τρίγωνα που έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία είναι ίσα.
13. Ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο δεν μπορεί να είναι ισοσκελές.

Ασκήσεις

1 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Πάνω στη διχοτόμο Αx, παίρνουμε τμήματα ΑΔ=ΑΒ και ΑΕ=ΑΓ. Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $Α\hat{Γ}Δ$ και $Α\hat{Ε}Β$ είναι ίσες.

2 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το Α) παίρνουμε ίσα τμήματα ΑΔ, ΑΕ αντίστοιχα. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι ΜΔ=ΜΕ.

3 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και φέρνουμε τις ημιευθείες Αx⊥ΑΒ και Αy⊥ΑΓ, έτσι ώστε καθεμία από τις γωνίες $x\hat{Α}Β$ και $y\hat{Α}Γ$ να είναι εφεξής με τη γωνία $\hat{Α}$ του τριγώνου. Στις Αx και Αy παίρνουμε τμήματα ΑΔ=ΑΒ και ΑΕ=ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΒΕ=ΓΔ.

4 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και στις ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ παίρνουμε τμήματα ΑΔ=ΒΕ=ΓΖ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

5 Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ (προς τις κορυφές Β, Γ και Α αντίστοιχα) και στις προεκτάσεις παίρνουμε τμήματα ΒΚ=ΓΛ=ΑΜ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.

6 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και τα μέσα Κ, Μ, Λ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΑ διχοτομεί τη γωνία $Κ\hat{Μ}Λ$.

7 Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και έστω Γ το μέσο του. Στο ένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία ΑΒ παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε (που δεν ανήκουν στην ευθεία ΑΒ) τέτοια ώστε ΑΔ=ΒΕ και ΓΔ=ΓΕ. Να αποδείξετε ότι ΑΕ=ΒΔ.

8 Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$. Στην ημιευθεία Οx παίρνουμε σημεία Α και Β και στην ημιευθεία Οy παίρνουμε σημεία Γ και Δ έτσι ώστε ΟΑ=ΟΓ και ΟΒ=ΟΔ. Αν Ε είναι το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΓ, να αποδείξετε ότι ΕΒ=ΕΔ

9 Ένα σημείο Α που βρίσκεται εκτός κύκλου κέντρου Ο, απέχει εξίσου από δύο σημεία Β, Γ του κύκλου. Να δείξετε ότι η διχοτόμος της γωνίας $Β\hat{Α}Γ$ διέρχεται από το Ο.

10 Θεωρούμε γωνία $x\hat{O}y$ και δύο κύκλους (Ο,ρ), (Ο,R). Αν ο πρώτος κύκλος τέμνει τις πλευρές Οx, Οy στα Α, Β, ο δεύτερος στα Γ, Δ και Μ είναι το σημείο τομής των ΑΔ, ΒΓ, να αποδείξετε ότι:
(i) τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ είναι ίσα
(ii) τα τρίγωνα ΜΑΓ και ΜΒΔ είναι ίσα
(iii) τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΒΜ είναι ίσα
(iv) η ΟΜ είναι η διχοτόμος της $x\hat{O}y$

Τράπεζα Θεμάτων

Θέμα 2ο

11 **1565.** Έστω δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (με ΑΒ=ΑΓ) και Α′Β′Γ′ (με Α′Β′=Α′Γ′).
α) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $ΑΒ = Α'Β'$ και $Α = Α'$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $ΑΓ = Α'Γ'$ και $Β = Β'$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.