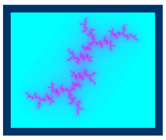
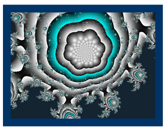
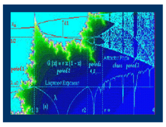
Π ε ρ ι ε χ ό μ ε ν α








ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΑ
1

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $A \subseteq R$ ονομάζουμε το κανόνα ή την διαδικασία με την οποία αντιστοιχίζεται κάθε στοιχείο $x \in A$ σε ένα και μοναδικό πραγματικό αριθμό $y \in B$.

Δηλαδή $x \xrightarrow{f} y \Leftrightarrow f(x) = y$

$$f : A \to B \text{ με } f(x) = \ldots\ldots$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Το $x \in A$ και λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή.
  Το y ονομάζεται τιμή της f στο χ και λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή.
  Το y ανήκει σε ένα σύνολο $B \subseteq R$ το οποίο λέγεται σύνολο τιμών της συνάρτησης και συμβολίζεται $B = f(A)$.
  Ο συμβολισμός $f : A \to B$, σημαίνει ότι το A είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αλλά το B δεν είναι υποχρεωτικά το σύνολο τιμών, πάντως σε κάθε περίπτωση το σύνολο τιμων της f είναι υποσύνλο του B.

- Μία συνάρτηση λέμε ότι ορίζεται <<καλώς>> αν δίνεται ο τύπος της και το πεδίο ορισμού της. Σε περίπτωση που δίνεται μόνο ο τύπος της συνάρτησης σαν πεδίο ορισμού θεωρούμε όλους τους πραγματικούς αριθμούς που μπορεί να δεχθεί ο τύπος.

➢ Σε πολλές περιπτώσεις μία συνάρτηση έχει περισσότερους από ένα Τύπους, οπότε θα δίνεται με τη μορφή :

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & \alpha\nu\ x\in \mathrm{A}_1 \\ f_2(x), & \alpha\nu\ x\in \mathrm{A}_2 \\ . & \\ . & \\ f_\nu(x), & \alpha\nu\ x\in \mathrm{A}_\nu \end{cases}$$ με $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\ldots\ldots\ldots\ldots\mathrm{A}_\nu \in R$.

Τότε ισχύει ότι $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$ με $i,j\in\{1,2,\ldots\ldots\nu\}$ και $i\neq j$.

Το πεδίο ορισμού της της συνάρτησης θα είναι $\mathrm{A}=\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\ldots\ldots\ldots\ldots\cup\mathrm{A}_\nu$.

ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1) ΠΩΛΥΩΝΥΜΙΚΗ: $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots..+\alpha_1 x+\alpha_0$ $\quad A_f=R$

2) ΡΗΤΗ: $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ $\quad A_f=\{x\in R/Q(x)\neq 0\}$

3) ΑΡΡΗΤΗ: $f(x)=\sqrt[\kappa]{P(x)}$ $\quad A_f=\{x\in R/P(x)\geq 0\}$

4) ΕΚΘΕΤΙΚΗ: $f(x)=\alpha^{P(x)}$, $\alpha>0\ \&\alpha\neq 1$ $\quad A_f=R$

5) ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ: $f(x)=\log_\alpha(P(x))$ $\alpha>0\&\alpha\neq 1$ $\quad A_f=\{x\in R/P(x)>0\}$

6) $f(x)=P(x)^{Q(x)}$ $\quad A_f=\{x\in R/P(x)>0\}$

7) ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ:

Α) $f(x)=\eta\mu P(x)$ $\quad A_f=R$

Β) $f(x)=\sigma\upsilon\nu P(x)$ $\quad A_f=R$

Γ) $f(x)=\varepsilon\varphi P(x)$ $\quad A_f=\{x\in R/\sigma\upsilon\nu P(x)\neq 0\}$

Δ) $f(x)=\sigma\varphi P(x)$ $\quad A_f=\{x\in R/\eta\mu P(x)\neq 0\}$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης χωρίς να κάνουμε πράξεις ή να εφαρμόσουμε ιδιότητες στον δεδομένο τύπο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{\frac{x-3}{x}}$ τότε ο περιορισμός για το πεδίο ορισμού είναι

$\frac{x-3}{x}\geq 0 \quad \mu\varepsilon \quad x\neq 0$ οπότε $x(x-3)\geq 0 \quad \mu\varepsilon \quad x\neq 0$

x	-∞	0	3	+∞
$x(x-3)$	+	-	+	

Άρα $\mathrm{A}=(-\infty,0)\cup[3,+\infty)$

Σε περίπτωση που κάποιος θα εφάρμοζε ιδιότητα ριζών θα προέκυπτε $f(x)=\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x}}$

και οι περιορισμοί για το πεδίο ορισμού είναι $x-3\geq 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad x>0$. Τότε ως πεδίο ορισμου θα προέκυπτε το $\mathrm{A}=[3,+\infty)$,

το οποίο είναι λάθος.

ΕΥΡΕΣΗ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ!!!

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης ελέγχουμε τον τύπο της αν έχει παρονομαστές ,ρίζες ή λογάριθμους.

Οι παρονομαστές πρέπει να είναι διάφοροι το μηδέν ($\frac{\mathrm{A}}{\Pi}, \quad \Pi\neq 0$)

Οι υπόριζες ποσότητες πρέπει να είναι μη αρνητικοί αριθμοί ($\sqrt{\Pi}, \quad \Pi\geq 0$)

Οι παραστάσεις που είναι μέσα στους λογερίθμους πρέπει να είναι μεγαλύτερες του μηδενός . ($\log_a \Pi, \quad \Pi>0$)

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2+3x+4}{x+3}-2}+\frac{1}{x^2+6x}$$

ΛΥΣΗ

Οι περιορισμοί που προκύπτουν είναι : $\dfrac{x^2+3x+4}{x+3}-2\geq 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x^2+6x\neq 0$

$$x^2+6x\neq 0 \Leftrightarrow x\left(x+6\right)\neq 0 \;\; \acute{A}\rho\alpha \;\; x\neq 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x\neq -6$$

$$\frac{x^2+3x+4}{x+3}-2\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+3x+4-2x-6}{x+3}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-2}{x+3}\geq 0$$

άρα $\left(x^2+x-2\right)\left(x+3\right)\geq 0$ με $x^2+x\neq -3$

X	-∞ -3	-2	1	+∞
$\left(x^2+x-2\right)$	+	+	-	+
$(x+3)$	-	+	+	+
$\left(x^2+x-2\right)(x+3)$	-	+	-	+

Άρα $A_f=\left(-3,-2\right]\cup\left[1,+\infty\right)$

2. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x)=\sqrt{10x-x^2}+\frac{5x+7}{\sqrt{\left|x-2\right|-1}} .$$

ΛΥΣΗ

Πρέπει $10x-x^2\geq 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \left|x-2\right|-1\geq 0$

x	$-\infty$	0	10	$+\infty$
$10x-x^2$	-	+	-	

Άρα $x \in [0,10]$

$|x-2|-1>0 \Rightarrow |x-2|>1 \Rightarrow x<1 \quad ή \quad x>3$

Άρα $A_f=[0,1)\cup(3,10]$

3. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :

α) $g(x)=\ln\left(x^2-4|x|+3\right)$ β) $f(x)=\sqrt{3-|x|}+\dfrac{1}{x^2+x-2}$

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει $x^2-4|x|+3>0 \Leftrightarrow |x|^2-4|x|+3>0$

θέτω $|x|=\omega$ άρα έχω $\omega^2-4\omega+3>0$

$\omega^2-4\omega+3=0$ Δ=4 ω=3 ή ω=1

ω	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$\omega^2-4\omega+3$	+	-	+	

Άρα $\omega>3$ ή $\omega<1$

$\omega<1 \Leftrightarrow |x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$ και $\omega>3 \Leftrightarrow |x|>3 \Leftrightarrow x<-3$ ή $x>3$

Άρα $A_g=(-\infty,-3)\cup(-1,1)\cup(3,+\infty)$

β) Οι περιορισμοί που προκύπτουν είναι : $3-|x|\geq 0$ και $x^2+x-2\neq 0$

$3-|x|\geq 0 \Leftrightarrow 3\geq |x| \Leftrightarrow -3\leq x\leq 3$

$x^2+x-2=0$ Δ=9 χ=-2 ή χ=1

Άρα $A_f=\{x\in[-3,3]/\, x\neq -2 \text{ και } x\neq 1\}=[-3,-2)\cup(-0,1)\cup(1,3]$

4. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\sqrt{\dfrac{3-|x|}{e^x-1}}$

ΛΥΣΗ

Οι περιορισμοί που προκύπτουν είναι : $\dfrac{3-|x|}{e^x-1}\geq 0 \;\; \mu\varepsilon \;\; e^x-1\neq 0$

οπότε $(3-|x|)(e^x-1)\geq 0 \;\; \mu\varepsilon \;\; x\neq 0$

x	$-\infty$ -3	0	3	$+\infty$
$3-\|x\|$	-	+	+	-
e^x-1	-	-	+	+
$(3-\|x\|)(e^x-1)$	+	-	+	-

Άρα

$A_f=(-\infty,-3]\cup(0,3]$

5. Να βρείτε τις τιμές του α ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να έχουν πεδίο ορισμού το R .

α) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-6x+a} \quad \mu\varepsilon \;\; a\in R$. β) $g(x)=\sqrt{ax^2-8x+a}, \quad \mu\varepsilon \;\; a\in R$

ΛΥΣΗ

α) Για να έχει πεδίο ορισμού το R πρέπει $x^2-6x+a\neq 0$ για κάθε $x\in R$

Άρα πρέπει Δ<0 $\Leftrightarrow (-6)^2-4a<0 \Leftrightarrow 36-4a<0 \Leftrightarrow 4a>36 \Leftrightarrow a>9$

Οπότε πρέπει α>9

β) Για να έχει η g πεδίο ορισμού το R πρέπει

$ax^2-8x+a\geq 0 \;\; \forall \;\; x\in R$ άρα πρέπει $\Delta\leq 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \alpha>0$

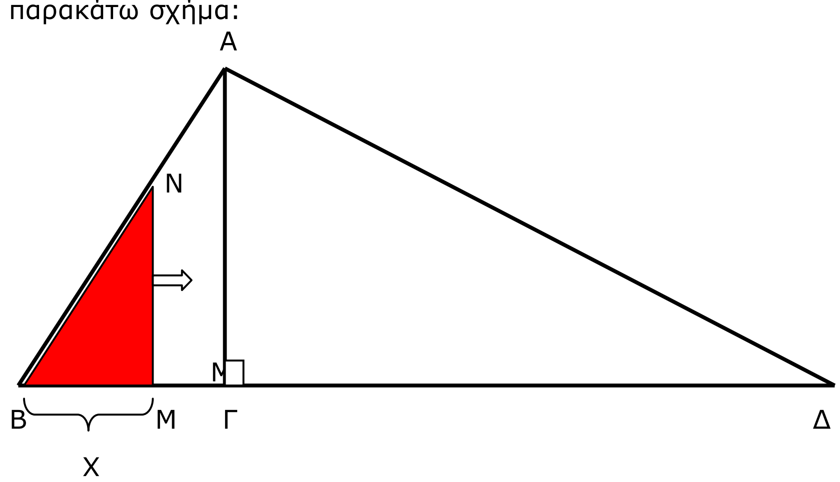
$\Delta\leq 0 \Leftrightarrow 8^2-4a^2\leq 0 \Leftrightarrow 16-a^2\leq 0$

x	**-∞**	**-4**	**4 +∞**
$16-\alpha^2$	**-**	**+**	**-**

Άρα $\alpha \le -4 \;\; ή \; \alpha \ge 4 \;\;\; αλλά \; \alpha > 0$

Άρα $\alpha \ \ge \ 4$

6. Δίνεται το παρακάτω σχήμα:

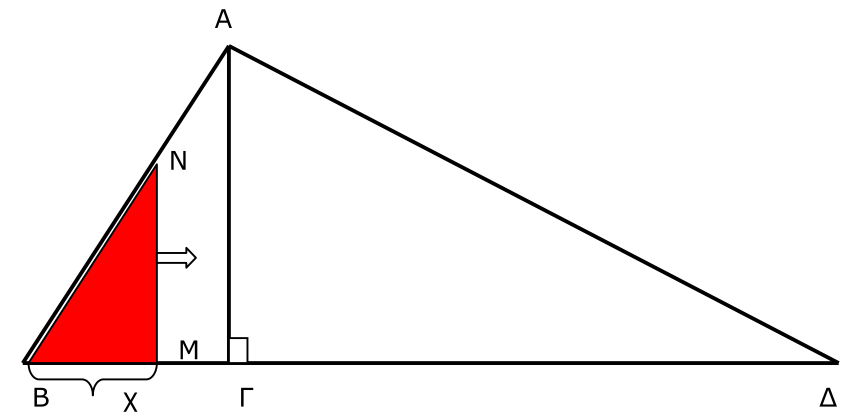


με ΒΓ=1 ,ΓΔ=3 ,ΑΓ=2 και ΒΜ=χ. Το σημείο Μ διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ ξεκινώντας από το Β και καταλήγοντας στο Δ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που δίνει το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου συναρτήσει του χ=ΒΜ δίνεται από τον τύπο

$$\mathrm{E}(x)=\begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{-x^2+8x-4}{3}, & 1 < x \le 4 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Αν το Μ κινείται από το σημείο Β έως το σημείο Γ δηλαδή $0 \le \mathrm{x} \le 1$ τότε



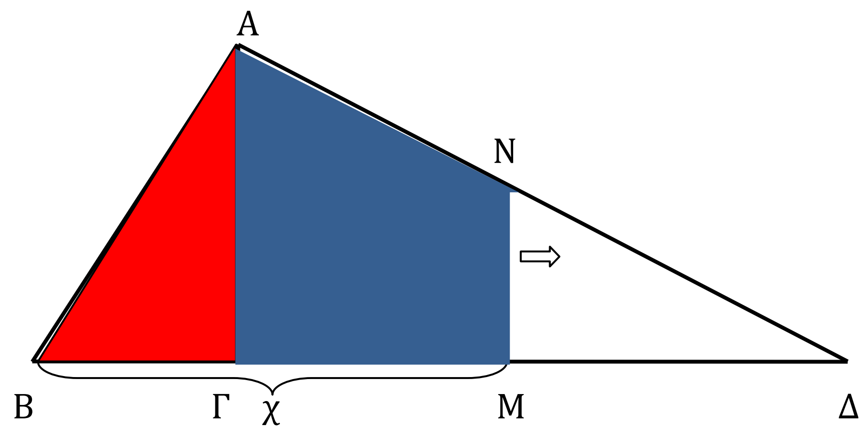
Το γραμμοσκιασμένο χωρίο που έχει σχηματιστεί είναι το τρίγωνο ΒΜΝ

Οπότε $E = \frac{1}{2} BM \cdot MN$ όμως τα τρίγωνα ΒΜΝ και ΑΒΓ είναι όμοια οπότε

έχουμε $\frac{MN}{BM} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \Rightarrow \frac{MN}{x} = \frac{2}{1} \Rightarrow MN = 2x$

Προκύπτει $E(x) = \frac{1}{2} x \cdot 2x = x^2$

Αν το Μ κινείται από το σημείο Γ έως το σημείο Δ δηλαδή $1 < x \leq 4$ τότε



Το γραμμοσκιασμένο χωρίο που έχει σχηματιστεί είναι το τρίγωνο ΑΒΓ
Και το τραπέζιο ΑΓΜΝ

Έχουμε $E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Gamma = 1$

$$E_{A\Gamma MN} = \frac{A\Gamma + MN}{2} M\Gamma = \frac{2 + MN}{2}(x - 1)$$

όμως τα τρίγωνα ΔΜΝ και ΑΔΓ είναι όμοια οπότε έχουμε $\frac{MN}{M\Delta}=\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta}\Rightarrow\frac{MN}{4-x}=\frac{2}{3}\Rightarrow MN=\frac{2}{3}(4-x)$

Οπότε $E_{A\Gamma MN}=\dfrac{2+\frac{2}{3}(4-x)}{2}(x-1)=\dfrac{(8-2x)(x-1)}{6}$

Προκύπτει $E(x)=1+\dfrac{(8-2x)(x-1)}{6}=\dfrac{-x^2+8x-4}{3}$

Τελικά $E(x)=\begin{cases} x^2\ , & 0\le x\le 1 \\ \dfrac{-x^2+8x-4}{3}, & 1<x\le 4\end{cases}$

7. Σύρμα μήκους 20cm κόβεται σε δύο κομμάτια. Με το πρώτο κομμάτι μήκους x φτιάχνουμε έναν κύκλο και με το δεύτερο κομμάτι φτιάχνουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο.
Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ως συνάρτηση του x είναι: Ε(x)= $\dfrac{9x^2+\pi\cdot(20-x)^2\cdot\sqrt{3}}{36\pi}$

ΛΥΣΗ

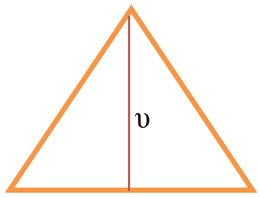
Η περίμετρος του κύκλου ακτίνας ρ είναι 2πρ. Επομένως, έχω:

2πρ=x $\Leftrightarrow$ ρ= $\dfrac{x}{2\pi}$

Το εμβαδόν του κύκλου ακτίνας ρ είναι πρ^2.

Άρα, Εκύκλου =π$\cdot\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2=\dfrac{\pi x^2}{4\pi^2}=\dfrac{x^2}{4\pi}$

Η κάθε πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου θα έχει μήκος $\frac{20-x}{3}$.



$\frac{20-x}{6}$

Απαιτούμε χ>0 και $\frac{20-x}{3}>0 \Rightarrow x<20$ οπότε $0<x<20$

υ^2=$\left(\frac{20-x}{3}\right)^2-\left(\frac{20-x}{6}\right)^2=\frac{(20-x)^2}{9}-\frac{(20-x)^2}{36}=\frac{3(20-x)^2}{36}=\frac{(20-x)^2}{12}$

άρα υ=$\frac{20-x}{\sqrt{12}}$

Ετριγ.=$\frac{\frac{20-x}{3}\cdot\frac{20-x}{\sqrt{12}}}{2}=\frac{\frac{(20-x)^2}{3\sqrt{12}}}{2}=\frac{(20-x)^2}{6\sqrt{12}}=\frac{(20-x)^2}{12\sqrt{3}}=\frac{(20-x)^2\cdot\sqrt{3}}{36}$

Επομένως, το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι:

$$\frac{x^2}{4\pi}+\frac{(20-x)^2\cdot\sqrt{3}}{36}=\frac{9x^2+\sqrt{3}\pi(20-x)^2}{36\pi}$$

Με $0<x<20$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

ΟΜΑΔΑ Α

1 Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $\alpha x^2 - \beta$. Να βρεθούν τα α, β ώστε f(-1) =-2 και f(-2) = 7.

2 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων με τύπο:

α) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$ β) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ γ) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$

δ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}$ ε) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}$ στ) $f(x)=\sqrt{(x+5)(1-x)}$

3 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :

α) $f(x) = \dfrac{3x+1}{3|x|+1}$ β) $f(x) = \dfrac{2x-1}{2|x|-1}$ γ) $f(x) = \dfrac{x+|x|}{x-|x|}$

δ) $f(x) = \sqrt{4x^2-1}+\dfrac{1}{x+2}$ ε) $f(x) = \sqrt{1-9x^2}+\dfrac{8}{x}$

4 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2 & \alpha\nu \ \ x \geq 0 \\ -2x+3 & \alpha\nu \ \ x<0 \end{cases}$.

Να βρείτε τα : f(-3), f(2), f(5), f(α-3) αν α > 3.

5 Δίνεται η συνάρτηση f(x) = x^2-1.

α) Για ποιές τιμές του $x \in R$ έχουμε f(x) = 0;

β) Για ποιές τιμές του $x \in R$ η συνάρτηση f(x) είναι θετική;

γ) Για ποιές τιμές του $x \in R$ η συνάρτηση f(x) είναι αρνητική;

6 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :