Π ε ρ ι ε χ ό μ ε ν α

6. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΟΡΙΑ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ 477

- Πράξεις–Σύνθεση- Αντίστροφη Συνάρτηση....479
- Όρια 536
- Συνέχεια Συνάρτησης 579

7. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ 617

- Διαφορικός λογισμός...619

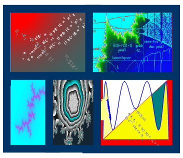
8. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ 717

- Ολοκληρωτικός λογισμός.................................719

9. ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2ΗΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ 755

10. ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3ΗΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ 789

11. ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4ΗΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ 827



12. ΟΔΗΓΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ 857

- Αποδείξεις- Γραφικές ερμηνείς.......................859
- Όρισμοί 870
- Επώνυμα θεωρήματα - κανόνες..................877
- Αντίστροφα θεωρημάτων που δεν ισχύουν.879
- Σωστού – Λάθους με αιτιολόγηση................881
- Παρατηρήσεις 886
- Άλλες σημαντικές παρατηρήσεις..................889
- Ανακεφαλαίωση μεθοδολογιών...................891
- Βασικές ασκησοθεωρίες 916
- Θέματα που δεν έχουν πέσει 918

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

6

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ –ΟΡΙΑ -ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΠΡΑΞΕΙΣ-ΣΥΝΘΕΣΗ-ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Πραγματική συνάρτηση

Έστω ένα σύνολο Α υποσύνολο του R. Ονομάζουμε Πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $A \subseteq R$ το κανόνα ή την διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα και μοναδικό πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο χ και συμβολίζεται f(χ). **(σελ. 15)**

Γραφική παράσταση

Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f είναι το σύνολο των σημείων

$C_f = \{M(x, f(x)) \forall x \in A_f\}$ **(σελ. 16)**

Ισότητα συναρτήσεων

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν :

Ι) έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και

Ιι) για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$ **(σελ. 23)**

Συνάρτηση άρτια

Μια συνάρτηση f λέγεται άρτια αν $\forall x \in A_f$ τότε και $-x \in A_f$ και $f(-x) = f(x)$

Συνάρτηση περιττή

Μια συνάρτηση f λέγεται περιττή αν $\forall x \in A_f$ τότε και $-x \in A_f$ και $f(-x) = -f(x)$

Συνάρτηση περιοδική

Μια συνάρτηση f λέγεται περιοδική αν υπάρχει πραγματικός αριθμός Τ>0 ώστε :

$\forall x \in A_f$ τότε και $T - x$, $T + x \in A_f$ και $f(x - T) = f(x + T) = f(x)$.

Ο αριθμός Τ λέγεται περίοδος της συνάρτησης.

Σύνθεση συναρτήσεων

Αν f,g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A_f και A_g αντίστοιχα τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g τη συνάρτηση που συμβολίζεται με $g \circ f$ η οποία έχει τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ και πεδίο ορισμού $A_{g \circ f} = \{x \in A_f \,/\, f(x) \in A_g\}$.

(σελ. 25)

ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Η gof ορίζεται αν $f(A) \cap A_g \neq \emptyset$

ΣΧΟΛΙΑ

1. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι gof και fog, τότε gof ≠ fog !!!!

2. Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η ho(gof), τότε θα ορίζεται και η (hog)of και θα είναι ίσες, δηλαδή: ho(gof) = (hog)of .

Συνάρτηση γνησίως αύξουσα

Μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της αν $\forall\ x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) < f(x_2)$.

(σελ. 31)

Συνάρτηση γνησίως φθίνουσα

Μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της αν $\forall\ x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) > f(x_2)$.

(σελ. 31)

→ Αν μία συνάρτηση f είναι γν. αύξουσα ή γν. φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέγεται γνησίως μονότονη στο Δ.

→ Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε η C_f τέμνει τον άξονα xx΄ το πολύ σε ένα σημείο. Άρα, η εξίσωση f(x) = 0 έχει το πολύ μία ρίζα στο Δ.

Σταθερή συνάρτηση

Μία συνάρτηση f λέγεται σταθερή στο Δ , αν για κάθε x1, x2 που ανήκουν στο Δ, με x1 < x2, ισχύει : f(x1) = f(x2)

Η σταθερή συνάρτηση είναι της μορφής: f(x) = c, και είναι παράλληλη προς τον xx΄ άξονα.

Ολικό μέγιστο

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A έχει σε ένα σημείο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο , το $f(x_0)$ αν $f(x) \leq f(x_0)$ *για κάθε* $x \in A$. Το $f(x_0)$ είναι η τιμή του ολικού μεγίστου.

(σελ. 32)

Ολικό ελάχιστο

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α έχει σε ένα σημείο $x_0 \in A$ ολικό ελάχιστο, το $f(x_0)$ αν $f(x) \geq f(x_0)$ *για κάθε* $x \in A$. Το f(x0) είναι η τιμή του ολικού ελαχίστου. **(σελ. 32)**

Συνάρτηση 1-1

Μία συνάρτηση f ορισμένη στο Α είναι 1-1 αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

ή αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$

(σελ. 33-34)

ΣΧΟΛΙΑ:

1. Αν μία συνάρτηση είναι 1 – 1, τότε στη γραφική της παράσταση δεν θα υπάρχουν σημεία με ίδιες τεταγμένες

2. Οι άρτιες συναρτήσεις ΔΕΝ είναι 1 – 1.

3. Οι σταθερές συναρτήσεις ΔΕΝ είναι 1 – 1.

4. Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι συνάρτηση 1 – 1 (π.χ. f(x) = αx+β, f(x) = α^x, $0<\alpha \neq 1$, f(x) = $\log_\alpha x$, $0<\alpha \neq 1$).

Αν, όμως, μία συνάρτηση είναι 1 – 1, δεν είναι απαραίτητα γνησίως μονότονη!!! (π.χ. g(x) = $\begin{cases} x, x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, x > 0 \end{cases}$).

Αντίστροφη συνάρτηση

Κάθε συνάρτηση που είναι 1-1 αντιστρέφεται δηλαδή ορίζεται μία άλλη συνάρτηση όπου αντιστοιχίζει κάθε εξαρτημένη μεταβλητή y στην ανεξάρτητη μεταβλητή x.

Δηλαδή $x \xrightarrow{f} y \Leftrightarrow y \xrightarrow{f^{-1}} x$ ή $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

(σελ. 35-36)

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ</u>

1. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f, και το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού της f.

2. f(x) = y $\Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

3. $f^{-1}(f(x)) = x$, για κάθε $x \in A$.

4. $f(f^{-1}(y)) = y$, για κάθε $y \in f(A)$.

5. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές σίγουρα ως προς την ευθεία y = x.
Μπορεί, όμως, να έχουν και άλλους άξονες συμμετρίας.

6. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε: $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x$.

απόδειξη (5): Έστω μία συνάρτηση $f:A \to \mathbb{R}$ που είναι 1 – 1.
Επειδή ισχύει: $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, αν ένα σημείο Μ(α, β)ανήκει στη γραφική παράσταση της f, C_f, τότε, το σημείο Μ΄(β, α) θα ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}, $C'_{f^{-1}}$, και αντίστροφα.
Τα σημεία Μ(α, β) και Μ΄(β, α) είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία y = x.Επομένως,οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΥΡΕΣΗ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ!!!

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης ελέγχουμε τον τύπο της αν έχει παρονομαστές ,ρίζες ή λογάριθμους.

Οι παρονομαστές πρέπει να είναι διάφοροι το μηδέν ($\frac{A}{\Pi}, \ \Pi \neq 0$)

Οι υπόριζες ποσότητες πρέπει να είναι μη αρνητικοί αριθμοί ($\sqrt{\Pi}, \ \Pi \geq 0$)

Οι παραστάσεις που είναι μέσα στους λογερίθμους πρέπει να είναι μεγαλύτερες του μηδενός . ($\log_a \Pi, \ \Pi > 0$)

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2+3x+4}{x+3}-2}+\frac{1}{x^2+6x}$$

ΛΥΣΗ

Οι περιορισμοί που προκύπτουν είναι : $\frac{x^2+3x+4}{x+3}-2\geq 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x^2+6x\neq 0$

$$x^2+6x\neq 0 \Leftrightarrow x(x+6)\neq 0 \;\; \text{Άρα} \;\; x\neq 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x\neq -6$$

$$\frac{x^2+3x+4}{x+3}-2\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+3x+4-2x-6}{x+3}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-2}{x+3}\geq 0$$

άρα $\left(x^2+x-2\right)(x+3)\geq 0$ με $x^2+x\neq -3$

x	-∞ -3	-3 -2	-2 1	1 +∞
(x^2+x-2)	+	+	-	+
$(x+3)$	-	+	+	+
$(x^2+x-2)(x+3)$	-	+	-	+

Άρα $A_f=(-3,-2]\cup[1,+\infty)$

2. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x)=\sqrt{10x-x^2}+\frac{5x+7}{\sqrt{|x-2|-1}} .$$

ΛΥΣΗ

Πρέπει $10x-x^2\geq 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; |x-2|-1\geq 0$

x	-∞ 0	0 10	10 +∞
$10x-x^2$	-	+	-

Άρα $x\in[0,10]$