ΕΥΡΕΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΕΘΕΙΑΣ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ!!!

Όταν ζητείται να βρεθεί η εξίσωση μιας ευθείας χρειαζόμαστε πρώτον σημείο που διέρχεται και δεύτερον συντελεστή διεύθυνση ή ένα άλλο σημείο.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Αν έχουμε παραλληλίες ή καθετότητες τότε βρίσκουμε τον συντελεστή διεύθυνσης .

Τα σημεία Α(3,-1) και Β(5,7) είναι οι δύο κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ ενώ το σημείο Η(4,-1) είναι το ορθόκεντρο του. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών και των διαμέσων του τριγώνου.

ΣΥΝΕΥΘΕΙΑΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ!!!

Για να αποδείξουμε ότι τρία σημεία είναι συνευθειακά έχουμε τις εξής μεθόδους(ανάλογα τις περιπτώσεις):

1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι ανά δύο ορίζουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης
2. Αρκεί να δείξουμε ότι το ένα ανήκει στη ευθεία που ορίζουν τα άλλα δύο .
3. Αρκεί να δείξουμε ότι το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζουν είναι μηδέν.
4. Αρκεί να δείξουμε ότι δύο διανύσματα που ορίζουν αυτά τα τρία σημεία είναι συγγραμμικά

Αποδείξτε ότι τα σημεία Α(2,3) , Β(-4,7) και Γ(5,1) βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

ΕΥΡΕΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΜΕ ΓΝΩΣΤΟ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ!!!

Όταν ζητείται να βρεθεί ευθεία με γνωστό συντελεστή διεύθυνσης που ικανοποιεί κάποια ιδιότητα κάνουμε το εξής: Υποθέτουμε ως $y=\lambda x+\beta$ την εξίσωση της ευθείας (το λ είναι γνωστό) και βάση της ιδιότητας που ικανοποιεί βρίσκουμε το β οπότε και την εξίσωση.

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε που είναι παράλληλη της $\varepsilon_1: 3\chi-y+2=0$ και της οποίας το άθροισμα των συντεταγμένων επί την αρχή είναι 6.

ΕΥΡΕΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ΓΝΩΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ!!!

Όταν ζητείται να βρεθεί ευθεία που διέρχεται από γνωστό σημείο ώστε να ικανοποιεί κάποια ιδιότητα κάνουμε το εξής: Υποθέτουμε δύο ενδεχόμενα :

α) Ότι έχει συντελεστή διεύθυνσης λ και βρίσκουμε την εξίσωση της ευθείας συναρτήσει του λ. Βάσει της ιδιότητας που ικανοποιεί βρίσκουμε το λ οπότε και την ευθεία και

β) Ότι δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης δηλαδή την κατακόρυφη ευθεία και ελέγχουμε αν ικανοποιεί την ιδιότητα ώστε να την δεχτούμε ή να την απορρίψουμε

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 3\chi+2y-6=0$ και $\varepsilon_2: 3\chi+2y-12=0$. Να βρεθεί η ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων και τέμνει τις ευθείες στα σημεία Α και Β ώστε (ΑΒ)=3.

ΕΥΘΕΙΕΣ ΠΟΥ ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΝ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ!!!

Όταν ζητείται να αποδειχθεί ότι τρεις ή και περισσότερες ευθείες συντρέχουν δηλαδή ότι διέρχονται από το ίδιο σημείο κάνουμε το εξής: Επιλέγουμε δύο από τις τρεις ή τις περισσότερες ευθείες και βρίσκουμε το κοινό τους σημείο λύνοντας το σύστημά τους Στην συνέχεια αποδεικνύουμε ότι αυτό το σημείο επαληθεύει και τις εξισώσεις των υπολοίπων ευθειών

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $ε_1$:2y=χ+10 και $ε_2$: y=2χ-4 και $ε_3$: χ+y=14 διέρχονται από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).

ΕΥΡΕΣΗ ΠΡΟΒΟΛΗΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΣΕ ΕΥΘΕΙΑ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ!!!

Όταν ζητείται να βρεθεί η προβολή ενός σημείου πάνω σε μία ευθεία κάνουμε το εξής: Βρίσκουμε τον συντελεστή διεύθυνσης της κάθετης στην ευθεία που διέρχεται από το σημείο και στην συνέχεια την εξίσωσή της. Λύνουμε σύστημα της ευθείας και της κάθετης.. Η λύση του συστήματος μας δίνει τις συντεταγμένες της προβολής.

Δίνεται η ευθεία με εξίσωση $ε: y = -\frac{1}{3}x + 1$ και το σημείο Α(3,2). Να βρείτε την προβολή του Α πάνω στην ευθεία ε.

ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ!!!

Όταν ζητείται να βρεθεί το συμμετρικό ενός σημείου ως προς μία ευθεία κάνουμε το εξής: Βρίσκουμε την προβολή του σημείου πάνω στη ευθεία. Από το γεγονός ότι η προβολή είναι μέσο του ευθυγράμμου τμήματος που ορίζει το σημείο και το συμμετρικό του, βρίσκουμε τις συντεταγμένες του συμμετρικού.

Δίνεται η ευθεία με εξίσωση ε: $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ και το σημείο Α(3,1). Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α΄ συμμετρικού του Α ως προς την ευθεία ε.

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ (ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ ΕΥΘΕΙΩΝ)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ!!!

Όταν δίνεται εξίσωση με παράμετρο και ζητείται να αποδειχθεί ότι παριστάνει ευθεία κάνουμε το εξής: Παραγοντοποιούμε ως προς x και ως προς y δηλαδή την φέρνουμε στην μορφή Αx+Βy+Γ=0. Στην συνέχεια λύνουμε τις εξισώσεις Α=0 και Β=0. Οι τιμές της παραμέτρου που αποτελούν κοινή λύση των δύο εξισώσεων πρέπει να εξαιρεθούν. Για τις υπόλοιπες τιμές της παραμέτρου η εξίσωση παριστάνει ευθεία.

Δίνονται οι εξισώσεις $ε_1$:(κ+1)(χ+y)+ (κ-2)(3χ-4y)+κ=0 και $ε_2$: χ-2y+κ=0. Να δειχθεί ότι η $ε_1$ παριστάνει ευθεία για κάθε $κ \in R$. Να βρεθεί ο $κ \in R$ ώστε οι ευθείες να είναι κάθετες.

ΑΠΕΙΡΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟ ΙΔΙΟ ΣΗΜΕΙΟ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ!!!

Όταν δίνεται εξίσωση με παράμετρο και ζητείται να αποδειχθεί ότι παριστάνει ευθείες που διέρχονται από το ίδιο σημείο έχουμε δύο μεθόδους:

1 Παραγοντοποιούμε την παραμετρική εξίσωση και την φέρνουμε στη μορφή $(α_1χ+β_1y+γ_1)+λ(α_2χ+β_2y+γ_2)=0$ όπου $λ\in R$ είναι η παράμετρος. Τότε λύνουμε το σύστημα των ευθειών $α_1χ+β_1y+γ_1=0$ και $α_2χ+β_2y+γ_2=0$ και βρίσκουμε το σημείο τομής τους από το οποίο διέρχονται όλες οι ευθείες

2 θέτουμε δύο τυχαίες τιμές στη παράμετρο λ (συνήθως 0 και 1) και προκύπτουν δύο από τις άπειρες ευθείες που παριστάνει η παραμετρική εξίσωση. Λύνουμε το σύστημά τους και βρίσκουμε το σημείο τομής τους.. Στην συνέχεια αποδεικνύουμε ότι αυτό το σημείο επαληθεύει την παραμετρική εξίσωση (της οικογένειας ευθειών) για κάθε τιμή του λ.

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2+2\lambda+2)x+(2\lambda^2+3\lambda+3)y-2\lambda^2-\lambda-1=0$

Να δειχθεί ότι για κάθε $\lambda \in R$ η εξίσωση παριστάνει ευθεία που περνάει από σταθερό σημείο το οποίο να βρεθεί.

ΕΞΙΣΩΣΗ ΠΟΥ ΠΑΡΙΣΤΑΝΕΙ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΕΣ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ!!!

Όταν δίνεται εξίσωση της μορφής $x^2+\alpha xy+y^2+\beta x+\gamma y+\delta=0$ και ζητείται να αποδειχθεί ότι παριστάνει δυο ευθείες έχουμε δύο μεθόδους:

1 Με την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων και στην συνέχεια με την ταυτότητα διαφορά τετραγώνων παραγοντοποιούμε την εξίσωση σε γινόμενο δύο παραγόντων. Ο κάθε παράγοντας αποτελεί την εξίσωση μιας ευθείας.

2 Διατάσσουμε την παραπάνω εξίσωση σε τριώνυμο ως προς x ή ως προς y. Στην συνέχεια βρίσκουμε τις λύσεις του τριωνύμου. Η κάθε λύση αποτελεί την εξίσωση μιας ευθείας.

Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^2+3xy+2y^2+x+3y-2=0$ παριστάνει δύο ευθείες.

ΓΩΝΙΑ ΕΥΘΕΙΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ!!!

Για να βρούμε την γωνία δύο ευθειών ε_1: $\alpha_1\chi+\beta_1 y+\gamma_1=0$ και ε_2:$\alpha_2\chi+\beta_2 y+\gamma_2=0$, βρίσκουμε την γωνία που σχηματίζουν τα παράλληλά τους διανύσματα $\vec{\delta}_1=(\beta_1,-\alpha_1), \vec{\delta}_2=(\beta_2,-\alpha_2)$ από τον τύπο : $\sigma\upsilon\nu\phi=\dfrac{\vec{\delta}_1.\vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1||\vec{\delta}_2|}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Για να βρούμε την οξεία γωνία δύο ευθειών παίρνουμε την απόλυτη τιμή του εσωτερικού γινομένου των διανυσμάτων. Δηλ. $|\ \vec{\delta}_1\vec{\delta}_2\ |$.

Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών που παριστάνει η εξίσωση $x^2-xy-6y^2-3x+14y-4=0$.

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ!!!

Όταν ζητείται να βρεθεί η απόσταση δύο παραλλήλων ευθειών κάνουμε το εξής: Βρίσκουμε τυχαίο σημείο στην μία ευθεία και στην συνέχεια την απόσταση του σημείου αυτού από την άλλη ευθεία. Αυτή η απόσταση είναι η απόσταση των παραλλήλων ευθειών.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Έστω δύο παράλληλες ευθείες ε_1: $y=\lambda\chi+\beta_1$ και ε_2: $y=\lambda\chi+\beta_2$ τότε εφαρμόζοντας την παραπάνω διαδικασία βρίσκουμε ότι η απόσταση των δύο <u>παραλλήλων</u> ευθειών δίνεται από τον τύπο $d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\dfrac{|\beta_1-\beta_2|}{\sqrt{1+\lambda^2}}$

Να βρείτε την απόσταση των ευθειών ε_1:$3\chi+4y=12$ και ε_2: $3\chi+4y=2$.

ΕΥΡΕΣΗ ΜΕΣΟΠΑΡΑΛΛΗΛΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ!!!

Για να βρούμε την εξίσωση της μεσοπαραλλήλου μεταξύ δύο παραλλήλων ευθειών εργαζόμαστε ως εξής:

Έστω ε_1: $\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1=0$ και ε_2:$\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2=0$ οι δύο παράλληλες ευθείες. (Η μεσοπαράλληλος δύο παραλλήλων ευθειών είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τις δύο ευθείες). Οπότε αν υποθέσω ότι Μ(x,y) τυχαίο σημείο της μεσοπαραλλήλου θα πρέπει να ισχύει ότι :

$$d(M,\varepsilon_1)=d(M,\varepsilon_2)\Leftrightarrow \frac{|\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1|}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}}=\frac{|\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2|}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}}.$$

Λύνοντας βρίσκουμε την εξίσωση της μεσοπαραλλήλου .

Δίνονται οι ευθείες ε_1:$x-3y+4=0$ και ε_2:$3x-9y+15=0$. Να βρείτε τη εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών ε_1 και ε_2.

ΕΥΡΕΣΗ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥ ΓΩΝΙΑΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ!!!

Για να βρούμε την εξίσωση των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν δύο ευθείες εργαζόμαστε ως εξής:

Έστω ε_1: $\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1=0$ και ε_2:$\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2=0$ δύο ευθείες. (Η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τις πλευρές της). Οπότε αν υποθέσω ότι Μ(x,y) τυχαίο σημείο της διχοτόμου δα πρέπει να ισχύει ότι :

$$d(M,\varepsilon_1)=d(M,\varepsilon_2)\Leftrightarrow \frac{|\alpha_1 \chi+\beta_1 y+\gamma_1|}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}}=\frac{|\alpha_2 \chi+\beta_2 y+\gamma_2|}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}}.$$

Λύνοντας βρίσκουμε τις δύο εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι δύο ευθείες τεμνόμενες.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Σε περίπτωση που ζητείται ποια είναι η διχοτόμος της οξείας και ποια της αμβλείας , τότε παίρνουμε ένα σημείο πάνω στη μια ευθεία και στην συνέχεια βρίσκουμε την απόσταση του από τις δύο διχοτόμους , η μεγαλύτερη απόσταση αντιστοιχεί στην διχοτόμο της αμβλείας ενώ η μικρότερη αντιστοιχεί στην διχοτόμο της οξείας γωνίας.

Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1:2y=χ+10 και ε_2: y=2χ-4

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ (ΣΗΜΕΙΟ ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ!!!

Όταν δίνεται σημείο που οι συντεταγμένες του έχουν παράμετρο (δηλαδή άπειρα σημεία) και ζητείται να βρεθεί ο γεωμετρικός τους τόπος κάνουμε το εξής: Υποθέτουμε Μ(x,y) τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου και εξισώνουμε την τετμημένη με x και την τεταγμένη με y. Συνδυάζουμε τις δύο παραπάνω σχέσεις και απαλείφοντας την παράμετρο βρίσκουμε μία εξίσωση που ικανοποιούν τα x και y. Αυτή η εξίσωση προσδιορίζει και το ζητούμενο γεωμετρικό τόπο.

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(4-3λ, $\frac{\lambda-5}{2}$) $\lambda \in R$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1 Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το σημείο $A(-2,1)$ και είναι παράλληλη στην (ε) όταν:

i. $(\varepsilon): y = 2x + 1$

ii. $(\varepsilon): x = 3$

iii. $(\varepsilon): y = 2$

2 Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (δ) που διέρχεται από το σημείο $A(1,-3)$ και είναι κάθετη στην (ε) όταν:

i. $(\varepsilon): y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

ii. $(\varepsilon): x = -1$

iii. $(\varepsilon): y = 1$

3 Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-2,3)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 120^0.

4 Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-1,4)$ όταν:

i. Σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \frac{\pi}{4}$

ii. Είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\alpha} = (-2,4)$

iii. Είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\beta} = (0,5)$

5 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής Μ των ευθειών $(\varepsilon_1): 3x - y - 5 = 0$ και $(\varepsilon_2): x - 2y = 0$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon_3): 2x - y + 8 = 0$.

6 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -3x + 2016$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 24 τ.μ.

7 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία είναι κάθετη στην ευθεία $(\zeta): y = \dfrac{x+21}{2}$ και τέμνει τους άξονες $y'y$ και $x'x$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, ώστε η τεταγμένη του Α και η τετμημένη του Β να έχουν άθροισμα ίσο με 9.

8 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ και σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

9 Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται οι εξισώσεις των φορέων των υψών ΒΔ και ΓΕ ως εξής: $(B\Delta): y = -3x + 11$ και $(\Gamma E): y = x + 3$ και επιπλέον δίνεται η κορυφή $A(2,1)$.

Α. Να βρεθούν:

i. Οι εξισώσεις των ευθειών ΑΒ και ΑΓ.

ii. Οι συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.

10 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(2,6), Β(2,1) και Γ(7,-2). Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών και των διαμέσων του τριγώνου.

11 Τα σημεία Α(3,-1) και Β(5,7) είναι οι δύο κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ ενώ το σημείο Η(4,-1) είναι το ορθόκεντρο του. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου.

12 Να βρείτε το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ με Α(-2,2), Β(2,-1) και Γ(4,0).

13 Αποδείξτε ότι τα σημεία (2,3) , (-4,7) και (5,1) βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Στην συνέχεια βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζει η ευθεία αυτή με τους άξονες.

14 Δίνεται η ευθεία με εξίσωση ε: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ και το σημείο Α(3,1). Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α' συμμετρικού του Α ως προς την ευθεία ε.