ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

Η εξίσωση αχ+βy=γ είναι μία εξίσωση με αγνώστους τους χ,y. Λύση της εξίσωσης αυτής ονομάζουμε κάθε ζεύγος αριθμών (χ,y) που την επαληθεύουν.

γεωμετρική ερμηνεία

Οι λύσεις της εξίσωσης αχ+βy=γ αποτελούν συντεταγμένες σημείων Μ(χ,y) που βρίσκονται πάνω στην ευθεία που έχει εξίσωση $y=-\frac{\alpha}{\beta}x+\frac{\gamma}{\beta}$.

Δηλαδή γραφικά η εξίσωση αχ+βy=γ παριστάνει ευθεία γραμμή με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{\alpha}{\beta}$.

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ:

1. Η εξίσωση χ=κ παριστάνει ευθεία γραμμή παράλληλη στον άξονα χ΄χ
2. Η εξίσωση y=κ παριστάνει ευθεία γραμμή παράλληλη στον άξονα y΄y
3. Η εξίσωση 0χ+0y=0 έχει άπειρες λύσεις(Αόριστη ή Ταυτότητα) και επαληθεύεται από όλα Τα σημεία του επιπέδου.
3. Η εξίσωση 0χ+0y=γ με $\gamma \neq 0$ είναι αδύνατη και δεν παριστάνει τίποτα.

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΥΟ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

Η σύστημα $\begin{cases} a_1x+\beta_1y=\gamma_1 \\ a_2x+\beta_2y=\gamma_2 \end{cases}$ λέγεται γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους τους χ,y. Λύση του συστήματος αυτού ονομάζουμε το ζεύγος αριθμών (χ,y) που την επαληθεύουν και τις δύο εξισώσεις.

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ:

1. Σύστημα αδύνατο έχουμε όταν προκύπτει εξίσωση της μορφής 0χ+0y=γ .
2. Σύστημα αόριστο έχουμε όταν προκύπτει εξίσωση της μορφής 0χ+0y=0.

γεωμετρική ερμηνεία

Οι λύσεις του συστήματος $\begin{cases} a_1x+\beta_1y=\gamma_1 \\ a_2x+\beta_2y=\gamma_2 \end{cases}$ παριστάνει την σχετική θέση των ευθειών ε_1: $\alpha_1\chi+\beta_1y=\gamma_1$ και ε_1: $\alpha_2\chi+\beta_1y=\gamma_2$. Όταν το σύστημα έχει μοναδική λύση τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο που προσδιορίζεται από την λύση. Όταν το σύστημα είναι αδύνατο τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Όταν το σύστημα είναι αόριστο τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 ταυτίζονται έχουν άπειρα κοινά σημεία.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 2Χ2

Για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους (2χ2) $\begin{cases} a_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ a_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$ ακολουθούμε κάποιον από τους παρακάτω τρόπους.

1. ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ:

Βρίσκουμε δύο σημεία σε κάθε ευθεία βάζοντας δύο τιμές στο χ. Τοποθετούμε τα σημεία στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων και σχεδιάζουμε τις ευθείες. Προσδιορίζουμε το σημείο τομής τους, αν τέμνονται, το οποίο αποτελεί την λύση του συστήματος. Σε περίπτωση που είναι παράλληλες το σύστημα είναι αδύνατο και αν ταυτίζονται το σύστημα είναι αόριστο.

2. ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ:

Παίρνουμε την μία εξίσωση και λύνουμε ως προς ένα άγνωστο. Στην συνέχεια αντικαθιστούμε αυτόν τον άγνωστο στην άλλη εξίσωση και προκύπτει απλή εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού με ένα άγνωστο.

3. ΜΕ ΑΝΤΙΘΕΤΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ:

Πολλαπλασιάζουμε με κατάλληλο αριθμό την κάθε εξίσωση ώστε να σχηματίσουμε αντίθετους συντελεστές σε ένα από του δύο αγνώστους. Στην συνέχεια προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις και προκύπτει απλή εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού με ένα άγνωστο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1 Να λυθούν με την μέθοδο της αντικατάστασης και με την μέθοδο της απαλοιφής τα συστήματα :

α) $\chi + 2\psi = 11$ β) $3\chi + 2\psi = 12$
$2\chi + 4\psi = 5$ $5\chi - 3\psi = 1$

2 Να λυθούν τα συστήματα :

α) $x + \alpha^2\psi = 2$ β) $(\alpha-\beta)x + (\alpha+\beta)\psi = 2(\alpha^2-\beta^2)$ $\alpha, \beta \neq 0$
$x + \psi = 2$ $(\alpha+\beta)x - (\alpha-\beta)\psi = 4\alpha\beta$

3 Να λυθεί το σύστημα : $\chi + \psi = \lambda$
$\lambda\chi + \psi = 1$

4 Να λυθούν τα συστήματα :

α) $\lambda\chi + \psi = 12$ β) $(\lambda^2-1)\chi - \psi = \lambda$
$\chi + \psi = 2\lambda$ $2\chi - \psi = \lambda - 1$

5 Όμοια : $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\chi + \psi = 0$
$\chi + (\sqrt{3}+\sqrt{2})\psi = 0$

6 Να λύσετε τα συστήματα :

α) $\begin{cases} 3(x+7y) = -4 \\ 9(3+x) = 5(y+3) \end{cases}$ β) $\begin{cases} 3(\varphi-3\omega) = 5(3\omega-\varphi) \\ 2(3\varphi-\omega) = 3(4\omega+\varphi)+5 \end{cases}$

7 Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} x - \dfrac{2x-y}{2} + \dfrac{1}{4} = 0 \\ \dfrac{2x-1}{6} - \dfrac{1-y}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

8 Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} x-\sqrt{3}y=0 \\ \sqrt{2}x-y=1-\sqrt{6} \end{cases}$

9 Να λυθούν τα συστήματα : α) $\begin{cases} |x|-|y|=-1 \\ 4|x|-3|y|=8 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2|x|+3|y|=5 \\ 3|x|+2|y|=5 \end{cases}$

10 Να λύσετε τα συστήματα :

α) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}=5 \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{7}{y}=-5 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{y+2}=0 \\ \dfrac{5}{x-1}-\dfrac{7}{y+2}=30 \end{cases}$

11 Να λύσετε τα συστήματα :

α) $\begin{cases} 2x^2-3y^2=15 \\ x^2-5y^2=4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} |x-1|+|2y+1|=0 \\ 3x+4y=8 \end{cases}$

12 Να βρεθούν τα x,yγια τα οποία ισχύει $|3x-2y-2|+|2x-y-3|=0$

13 Δίνεται η εξίσωση $5x^2+13y^2-16xy+6x-10y+2=0$

i) Να αποδείξετε ότι γράφεται σε μορφή
$(\alpha x+\beta y+\gamma)^2+(\kappa x+\lambda y+\mu)^2=0$
όπου α,β,γ,κ,λ,μ ακέραιοι συντελεστές

ii) Να βρείτε τα x,y

14 Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} (1+\sqrt{\pi}x+\pi y=\pi\sqrt{\pi} \\ -x+(1-\sqrt{\pi})y=\sqrt{\pi}-\pi \end{cases}$