

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

2

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΠΡΑΞΕΙΣ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

ΒΑΣΙΚΑ ΣΥΝΟΛΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Φυσικοί αριθμοί $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Ακέραιοι αριθμοί $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

Ρητοί αριθμοί $\mathbf{Q} = \{x \text{ όπου } x = \frac{\beta}{\alpha} \text{ , } \alpha, \beta \text{ ακέραιοι } \beta \neq 0\}$

Άρρητοι αριθμοί \mathbf{A} = Περιέχει αριθμούς με άπειρα δεκαδικά στοιχεία μη περιοδικά

Πραγματικοί αριθμοί \mathbf{R} = Το σύνολο που περιέχει τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΑΞΕΩΝ ΣΤΟ \mathbf{R}

ΠΡΟΣΘΕΣΗ	ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ	
$a + \beta = \beta + a$	$a \cdot \beta = \beta \cdot a$	Αντιμεταθετική
$a + (\beta + \gamma) = (a + \beta) + \gamma$	$a \cdot (\beta \cdot \gamma) = (a \cdot \beta) \cdot \gamma$	Προσεταιριστική
$a + 0 = 0 + a = a$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	Ουδέτερο στοιχείο
$a + (-a) = 0$	$a \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot a = 1$	
	$a \cdot 0 = 0$	Απορροφητικό στοιχείο
$a \cdot (\beta + \gamma) = a \cdot \beta + a \cdot \gamma$		Επιμεριστική

Αν έχουμε δύο ισότητες τότε μπορούμε να τις προσθέσουμε κατά μέλη	$a=\beta$ & $\gamma=\delta$ τότε $a+\gamma=\beta+\delta$
Αν έχουμε δύο ισότητες τότε μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη	$a=\beta$ & $\gamma=\delta$ τότε $a\gamma=\beta\delta$
Αν έχουμε μία ισότητα τότε μπορούμε να προσθέσουμε και στα δύο μέλη της το ίδιο αριθμό είτε μπορούμε να διαγράψουμε και από τα δύο μέλη της το ίδιο προσθετέο αριθμό	$a=\beta \Leftrightarrow a+\gamma=\beta+\gamma$
Αν έχουμε μία ισότητα τότε μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της το ίδιο αριθμό είτε μπορούμε να διαγράψουμε και από τα δύο μέλη της το ίδιο μη μηδενικό παράγοντα	$a=\beta \Leftrightarrow a\gamma=\beta\gamma$, αν $\gamma \neq 0$
Αν ένα γινόμενο παραγόντων είναι ίσο με το μηδέν τότε ένας τουλάχιστον από τους παράγοντες είναι ίσος με το μηδέν	$a\beta=0 \Leftrightarrow a=0$ ή $\beta=0$
Αν ένα γινόμενο παραγόντων είναι διάφορο από το μηδέν τότε πρέπει όλοι οι παράγοντες να είναι διάφοροι από το μηδέν	$a\beta \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ και $\beta \neq 0$
Δύο αριθμοί $a, \beta \in \mathbb{R}$ λέγονται αντίθετοι όταν έχουν άθροισμα μηδέν	a, β αντίθετοι $\Leftrightarrow a+\beta=0$ (δηλαδή $a=-\beta$)
Δύο μη μηδενικοί αριθμοί $a, \beta \in \mathbb{R}^*$ λέγονται αντίστροφοι όταν έχουν γινόμενο 1	a, β αντίστροφοι $\Leftrightarrow a \cdot \beta = 1$ (δηλαδή $a=\frac{1}{\beta}$)



Ποτέ δεν πρέπει να διαγράψουμε παράγοντα από τα μέλη μιας ισότητας αν δεν γνωρίζουμε ότι είναι διάφορος του μηδενός

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow$	$\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$ ή $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ ή $a\gamma = \beta\delta$
	$\frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{\gamma + \delta}{\delta}$ ή $\frac{\alpha - \beta}{\beta} = \frac{\gamma - \delta}{\delta}$
	$\frac{\alpha}{\beta + \alpha} = \frac{\gamma}{\delta + \gamma}$ ή $\frac{\alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\gamma}{\delta - \gamma}$
	$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$



ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΟΣ ΤΟΥ ΜΗΔΕΝΟΣ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ!!!

Όταν δίνεται μία παράσταση με παρονομαστές και ζητείται να βρεθεί για ποιες τιμές της μεταβλητής ορίζεται η παράσταση τότε πρέπει να πάρουμε ως περιορισμούς όλους τους παρονομαστές να είναι διάφοροι του μηδενός.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Να βρεθούν οι τιμές για τις οποίες ορίζεται η παράσταση

$$4 - \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2x} - 1$$

ΛΥΣΗ

Πρέπει όλοι οι παρονομαστές που εμφανίζονται να είναι διάφοροι του 0:

- $x + 1 \neq 0$ δηλαδή $x \neq -1$
- $2x \neq 0$ δηλαδή $x \neq 0$
- $\frac{1}{2x} - 1 \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{2x} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Αριθμητικές παραστάσεις

1 Να υπολογιστούν οι παραστάσεις :

$$\alpha) \frac{1 - \frac{1}{2}}{3 - \frac{2}{3}} \cdot \frac{2}{2 - \frac{1}{3}}$$

$$\beta) \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot \frac{1}{2} - 4 + \frac{2 + \frac{1}{4}}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{2}{3 - \frac{5}{3}}}$$

2 Να υπολογιστεί η παράσταση :

$$\frac{1 - \left(2 + \frac{6}{100} - \frac{121}{10} - 5 \right)}{9,2 + 7,1 - \left(\frac{45}{100} - \frac{37}{10} + 4 \right)}$$

3 Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$K = -\{a-2\beta-[3\gamma^2-\beta\cdot(\beta-a-10\gamma)] - (-\beta+a)\},$$

$$\text{αν ισχύει : } a = -4\cdot(-2)\cdot(-6) - [18-(4-7)\cdot(5-9-2)],$$

$$\beta = [(8-11) - 7]\cdot(-8+15) \text{ και } \gamma = [30-16-24-(22-15-16)]\cdot(-3)$$

Ιδιότητες των αναλογιών

4 Να βρεθούν τα x, y, w όταν ισχύει $\frac{x}{7} = \frac{y}{8} = \frac{w}{12}$ και $x + w = 57$.

5 Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί a, β, γ, δ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\alpha + \beta + 20}{\beta + 4} = 5 \quad \text{και} \quad \frac{\gamma + \delta}{\gamma - \delta} = 2$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4\beta$ και $\gamma = 3\delta$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\Pi = \frac{\alpha\gamma + \alpha\delta}{\gamma\beta - \delta\beta}$$

6 Αν $\alpha + \beta = 28$ και $\frac{\alpha}{5} = \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{4}$, να βρείτε τους αριθμούς α, β, γ .

7 Δίνονται μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 + 1} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

Φυσικοί αριθμοί

8 Να αποδείξετε ότι αν ο φυσικός αριθμός n είναι περιττός τότε ο αριθμός $n^2 - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 4.

9 Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί a και β είναι άρτιοι, τότε ο $a + \beta$ είναι άρτιος.

10 Αν α, β, γ είναι τρεις διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι το $\alpha + \beta + \gamma$ είναι πολλαπλάσιο του 3

11 Αν α, β, γ είναι τρεις διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2\alpha + \beta + \gamma + 7$ είναι άρτιος αλλά όχι πολλαπλάσιο του 4.

12 Αν ο αριθμός α είναι άρτιος και ο αριθμός β είναι περιττός, να αποδείξετε ότι:

- i) ο αριθμός $\alpha - \beta$ είναι περιττός
 ii) ο αριθμός $2\alpha + 2\beta$ είναι άρτιος αλλά όχι πολλαπλάσιο του 4

Περιορισμοί στους παρονομαστές

13 Να βρεθούν οι τιμές για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις :

$$\text{α) } A = \frac{x+5}{(1-2x) \cdot (x+5)} + \frac{3-x}{(3x+4) \cdot x} \quad \text{β) } B = \frac{4 - \frac{2}{x+1}}{\frac{1}{2x} - 1}$$

$$\text{γ) } \Gamma = \frac{\frac{2-x}{2x} + \frac{x+1}{x}}{3 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x}}$$

Τράπεζα Θεμάτων

14 ΘΕΜΑ 1251

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4 \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$ (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$ (Μονάδες 15)

15 ΘΕΜΑ 1254

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y} = -2$

α) Να αποδείξετε ότι: $y = 2x$ (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$ (Μονάδες 13)

Γενικές ασκήσεις

16 Να αποδείξετε ότι αν $\frac{x-1}{x+4} = \frac{y-1}{y+4}$ τότε αναγκαστικά $x=y$