

ΜΕΡΟΣ Α

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς

Διδακτικοί στόχοι

- Υπενθυμίσεις και συμπληρώσεις σχετικά με τις πράξεις
- Εμπέδωση των ιδιοτήτων των δυνάμεων
- Κατανόηση των ιδιοτήτων και απλών πράξεων με τετραγωνικές ρίζες

Α. Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

Ορισμός της δύναμης

Αν a είναι ένας πραγματικός αριθμός και n είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε η δύναμη a^n ορίζεται ως το γινόμενο: $a \cdot a \cdot a \cdots a$ (n παράγοντες). Ο αριθμός a λέγεται «βάση» και ο αριθμός n ονομάζεται «εκθέτης».

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ παράγοντες}}$$

Ορίζουμε επίσης $a^0 = 1$, για κάθε αριθμό $a \neq 0$. Η δύναμη 0^0 δεν ορίζεται.

Παράδειγμα

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{(πενταπλό γινόμενο του 3 με τον εαυτό του)}} = 3^5$$

Διαβάζουμε:
3 εις την πέμπτη

Δυνάμεις με αρνητική βάση

$$(\text{αρνητική βάση})^{\text{ζυγός εκθέτης}} = +$$

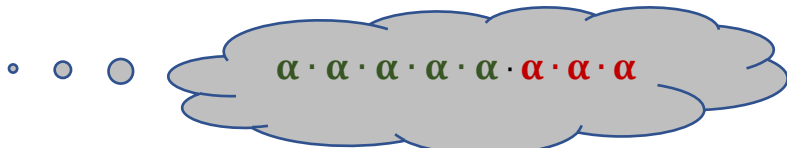
$$(\text{αρνητική βάση})^{\text{μονός εκθέτης}} = -$$

Ιδιότητες

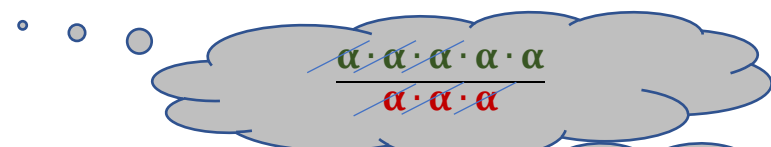
Για οποιουσδήποτε αριθμούς $a, \beta \neq 0$ και οποιουσδήποτε θετικούς ακέραιους μ, ν ισχύουν:

$$\begin{aligned} \alpha^\mu \cdot \alpha^\nu &= \alpha^{\mu+\nu} \\ \alpha^\mu : \alpha^\nu &= \alpha^{\mu-\nu} \\ (\alpha^\mu)^\nu &= \alpha^{\mu\nu} \\ \alpha^\mu \cdot \beta^\mu &= (\alpha\beta)^\mu \\ \alpha^\mu : \beta^\mu &= (\alpha:\beta)^\mu \end{aligned}$$

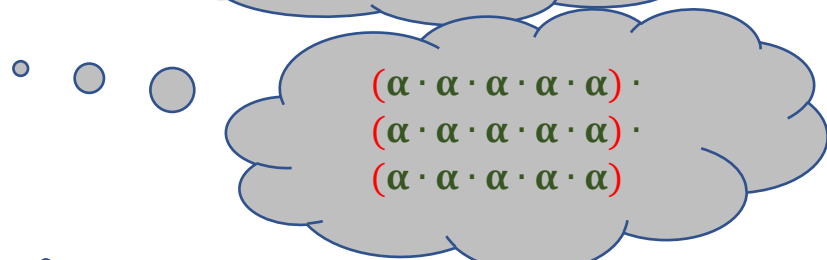
$$\alpha^5 \cdot \alpha^3 = \alpha^8$$



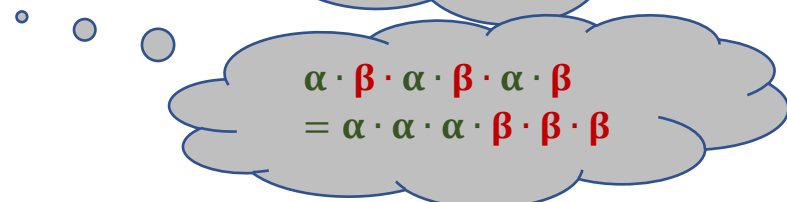
$$\alpha^5 : \alpha^3 = \alpha^2$$



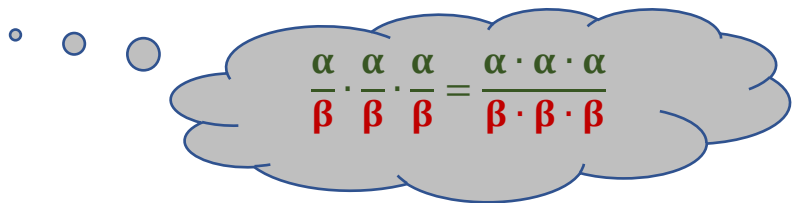
$$(\alpha^5)^3 = \alpha^{15}$$



$$(\alpha\beta)^3 = \alpha^3\beta^3$$



$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 = \frac{\alpha^3}{\beta^3}$$



Β. Η τετραγωνική ρίζα

Ορισμός

Οι ρίζες «ενώνονται»:

στον πολλαπλασιασμό: $\sqrt{10} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{20}$

στην διαίρεση: $\sqrt{10} : \sqrt{2} = \sqrt{5}$

όμως όχι στην πρόσθεση ούτε στην αφαίρεση!

$\sqrt{10} + \sqrt{2}$ δεν ισούται με $\sqrt{12}$

$\sqrt{5} - \sqrt{3}$ δεν ισούται με $\sqrt{2}$

Μεθοδολογία

- Για να απλοποιήσουμε μια παράσταση με δυνάμεις:
 1. Χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες, σύμφωνα με την προτεραιότητα.
 2. «Ενοποιούμε» τις δυνάμεις για κάθε αριθμό και κάθε μεταβλητή.

Παράδειγμα

$$A = \frac{y^5 \cdot x \cdot (x^3)^2}{y^8 \cdot x^5}$$

$$A = \frac{y^5 \cdot x \cdot x^6}{y^8 \cdot x^5}$$

$$A = \frac{y^5 \cdot x^7}{y^8 \cdot x^5}$$

$$A = \frac{x^2}{y^3}$$

- Για να απλοποιήσουμε μια παράσταση με ρίζες:
 1. Αν η ρίζα υπολογίζεται ακριβώς, την υπολογίζουμε.
 2. «Ενοποιούμε» τις όμοιες ρίζες.

Παράδειγμα

$$A = \sqrt{16} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{2} + 6\sqrt{5} - \sqrt{2}$$

$$A = 4 + 8\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$$

Παρατηρήσεις

1. Ο αρνητικός εκθέτης αντιστρέφει το κλάσμα:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

Με άλλα λόγια, μεταφέρει τον αριθμό από τον αριθμητή στον παρονομαστή και αντίστροφα:

$$\frac{5^{-3}}{2^{-4}} = \frac{2^4}{5^3}$$

2. Για να απλοποιήσουμε ρίζες μεγαλύτερων αριθμών:

$$\sqrt{20}$$

Σκεφτόμαστε: Ποιος πολλαπλασιασμός μου δίνει αποτέλεσμα 20;

$$2 \cdot 10 = 20 \quad \text{και} \quad 4 \cdot 5 = 20$$

Θα επιλέξουμε το $4 \cdot 5$ γιατί ξέρουμε την $\sqrt{4}$

$$\sqrt{20} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{5}$$

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Να μετατρέψετε τις εκφράσεις σε μία δύναμη, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες.

$$5^3 \cdot 5^7 =$$

$$3^9 : 3^5 =$$

$$(2^3)^4 =$$

$$5^7 \cdot 2^7 =$$

$$8^9 : 4^9 =$$

2. Να απλοποιήσετε τις ρίζες:

$$\sqrt{8} =$$

$$\sqrt{45} =$$

$$\sqrt{300} =$$

3. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \frac{(x^2y)^3xy^5}{x^3 \cdot (y^4)^2 \cdot x^2}$$

Ασκήσεις

Αριθμητικές παραστάσεις

1 Να υπολογίσετε τα αποτελέσματα των αριθμητικών παραστάσεων:

$$A = 3^2 - 2^3 - 4 \cdot (-2)^2 \cdot (-1)$$

$$B = 2 \cdot (10 + 2 \cdot 7 - 3^3)^2 - (-5)^2$$

$$\Gamma = 4 \cdot (-3)^2 + (-5)(-1)^4 - 3 \cdot (-2)^3$$

$$\Delta = (-2)^5 - 3 \cdot (7 - 2 \cdot 5 + 1)^3 - 2023^0$$

2 Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

i.	$(-12)^2$	ii.	$(+10)^3$	iii.	$(-2)^5$
iv.	$-(-3)^3$	v.	$(-5)^2$	vi.	$-(-1)^6$