ΜΕΡΟΣ Α

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1°

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς

Διδακτικοί στόχοι

- Υπενθυμίσεις και συμπληρώσεις σχετικά με τις πράξεις
- Εμπέδωση των ιδιοτήτων των δυνάμεων
- Κατανόηση των ιδιοτήτων και απλών πράξεων με τετραγωνικές ρίζες

Α. Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

<u>Ορισμός της δύναμης</u>

Αν α είναι ένας πραγματικός αριθμός και ν είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε η δύναμη α^ν ορίζεται ως το γινόμενο: $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha$ (ν παράγοντες). Ο αριθμός α λέγεται «βάση» και ο αριθμός ν ονομάζεται «εκθέτης».

$$\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{\text{ν παράγοντες}}$$

Ορίζουμε επίσης $\alpha^0 = 1$, για κάθε αριθμό $\alpha \neq 0$. Η δύναμη 0^0 δεν ορίζεται.

<u>Παράδειγμα</u>

Διαβάζουμε:

3 εις την πέμπτη

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{(πενταπλό γινόμενο του 3 με τον εαυτό του)}} = 3^5$$

<u>Δυνάμεις με αρνητική βάση</u>

$$(\text{αρνητική βάση})^{\text{ζυγός εκθέτης}} = +$$

$$(\text{αρνητική βάση})^{\text{μονός εκθέτης}} = -$$

<u>Ιδιότητες</u>

Για οποιουσδήποτε αριθμούς α, β $\neq 0$ και οποιουσδήποτε θετικούς ακέραιους μ, ν ισχύουν:

$$\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu+\nu}$$

$$\alpha^{\mu}:\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu-\nu}$$

$$(\alpha^{\mu})^{\nu}=\alpha^{\mu\nu}$$

$$\alpha^{\mu}\cdot\beta^{\mu}=(\alpha\beta)^{\mu}$$

$$\alpha^{\mu}:\beta^{\mu}=(\alpha:\beta)^{\mu}$$

$\alpha^5\cdot\alpha^3=\alpha^8$

$$\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha$$

$\alpha^5:\alpha^3=\alpha^2$

$$\frac{\cancel{\alpha}\cdot\cancel{\alpha}\cdot\cancel{\alpha}\cdot\alpha\cdot\alpha}{\cancel{\alpha}\cdot\cancel{\alpha}\cdot\cancel{\alpha}}$$

$(\alpha^5)^3=\alpha^{15}$

$$(\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha)\cdot(\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha)\cdot(\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha)$$

$(\alpha\beta)^3=\alpha^3\beta^3$

$$\alpha\cdot\beta\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\beta\cdot\beta$$

$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3=\frac{\alpha^3}{\beta^3}$

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha}{\beta\cdot\beta\cdot\beta}$$

Β. Η τετραγωνική ρίζα

<u>Ορισμός</u>

Οι ρίζες «ενώνονται»:

στον πολλαπλασιασμό: $\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{20}$

στην διαίρεση: $\sqrt{10}:\sqrt{2}=\sqrt{5}$

όμως όχι στην πρόσθεση ούτε στην αφαίρεση!

$$\sqrt{10}+\sqrt{2} \text{ δεν ισούται με } \sqrt{12}$$

$$\sqrt{5}-\sqrt{3} \text{ δεν ισούται με } \sqrt{2}$$

Μεθοδολογία

- Για να απλοποιήσουμε μια παράσταση με δυνάμεις:
  1. Χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες, σύμφωνα με την προτεραιότητα.
  2. «Ενοποιούμε» τις δυνάμεις για κάθε αριθμό και κάθε μεταβλητή.

Παράδειγμα

$$A=\frac{y^5\cdot x\cdot (x^3)^2}{y^8\cdot x^5}$$

$$A=\frac{y^5\cdot x\cdot x^6}{y^8\cdot x^5}$$

$$A=\frac{y^5\cdot x^7}{y^8\cdot x^5}$$

$$A=\frac{x^7}{y^3}$$

- Για να απλοποιήσουμε μια παράσταση με ρίζες:

  1. Αν η ρίζα υπολογίζεται ακριβώς, την υπολογίζουμε.
  2. «Ενοποιούμε» τις όμοιες ρίζες.

Παράδειγμα

$$A=\sqrt{16}+\mathbf{2\sqrt{5}}+\mathbf{4\sqrt{2}}+\mathbf{6\sqrt{5}}-\mathbf{\sqrt{2}}$$

$$A=4+\mathbf{8\sqrt{5}}+\mathbf{3\sqrt{2}}$$

Παρατηρήσεις

1. Ο αρνητικός εκθέτης αντιστρέφει το κλάσμα:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{5}\right)^{2}$$

   Με άλλα λόγια, μεταφέρει τον αριθμό από τον αριθμητή στον παρονομαστή και αντίστροφα:

$$\frac{5^{-3}}{2^{-4}} = \frac{2^4}{5^3}$$

2. Για να απλοποιήσουμε ρίζες μεγαλύτερων αριθμών:

$$\sqrt{20}$$

   Σκεφτόμαστε: Ποιος πολλαπλασιασμός μου δίνει αποτέλεσμα 20;

$$2 \cdot 10 = 20 \quad και \quad 4 \cdot 5 = 20$$

Θα επιλέξουμε το $4 \cdot 5$ γιατί ξέρουμε την $\sqrt{4}$

$$\sqrt{20} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{5}$$

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Να μετατρέψετε τις εκφράσεις σε μία δύναμη, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες.

$$5^3 \cdot 5^7 =$$

$$3^9 : 3^5 =$$

$$(2^3)^4 =$$

$$5^7 \cdot 2^7 =$$

$$8^9 : 4^9 =$$

2. Να απλοποιήσετε τις ρίζες:

$\sqrt{8} =$ $\qquad$ $\sqrt{45} =$ $\qquad$ $\sqrt{300} =$

3. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \frac{(x^2y)^3xy^5}{x^3 \cdot (y^4)^2 \cdot x^2}$$

Ασκήσεις

Αριθμητικές παραστάσεις

1 Να υπολογίσετε τα αποτελέσματα των αριθμητικών παραστάσεων:

$$\mathrm{A} = 3^2 - 2^3 - 4 \cdot (-2)^2 \cdot (-1)$$

$$\mathrm{B} = 2 \cdot \left(10 + 2 \cdot 7 - 3^3\right)^2 - (-5)^2$$

$$\Gamma = 4 \cdot (-3)^2 + (-5)(-1)^4 - 3 \cdot (-2)^3$$

$$\Delta = (-2)^5 - 3 \cdot (7 - 2 \cdot 5 + 1)^3 - 2023^0$$

2 Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

i.	$(-12)^2$	**ii.**	$(+10)^3$	**iii.**	$(-2)^5$
iv.	$-(-3)^3$	**v.**	$(-5)^2$	**vi.**	$-(-1)^6$