

# ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

## ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ

### Ευκλείδεια διαίρεση

Ερώτηση: Τι γνωρίζετε για την ευκλείδεια διαίρεση ;

Απάντηση: Αν δοθούν δύο φυσικοί αριθμοί, ο  $\Delta$  (διαιρετέος) και ο  $\delta$  (διαιρέτης), τότε βρίσκονται δύο άλλοι φυσικοί αριθμοί, ο  $\pi$  (πηλίκο) και ο  $u$  (υπόλοιπο), ώστε να ισχύει :

$$\Delta = \delta\pi + u, \text{ και } u < \delta.$$

Αυτή η διαδικασία λέγεται ευκλείδεια διαίρεση.

Ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης

$\Delta$	$\delta$	
	$\pi$	
$u$		<b>υπόλοιπο</b>

$\Delta = \delta \cdot \pi + u$

Διαιρετέος
↓ πηλίκο
διαιρέτης

πάντα      $u < \delta$

ΣΧΟΛΙΑ:

1. Αν  $u = 0$ , τότε θα είναι  $\Delta = \delta\pi$  και η διαίρεση θα λέγεται τέλεια.
2. Αν  $u \neq 0$ , τότε η διαίρεση θα λέγεται ατελής.
3. Ο διαιρέτης  $\delta$ , ΔΕΝ μπορεί να είναι 0.
4. Αν  $\delta = 1$ , τότε  $\Delta = \pi$ .
5. Αν  $\Delta = 0$ , τότε  $\pi = 0$ .

### Πολλαπλάσια

Ερώτηση: Ποιοι αριθμοί λέγονται πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού  $a$ ;

Απάντηση: Πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού  $a$ , λέγονται οι φυσικοί αριθμοί που προκύπτουν από την προπαίδια του  $a$ .

### Διαιρέτες

Ερώτηση: Ποιοι αριθμοί λέγονται διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού  $a$ ;

Απάντηση: Διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού  $a$ , λέγονται οι φυσικοί αριθμοί που τον διαιρούν.

**ΕΚΠ και ΜΚΔ**

Ερώτηση: Τι είναι το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο, και τί ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης;

Απάντηση: Ε.Κ.Π. είναι το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων αριθμών, που δεν είναι μηδέν. Μ.Κ.Δ. είναι ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες δύο ή περισσότερων αριθμών, που δεν είναι μηδέν.

**Πρώτοι αριθμοί**

Ερώτηση: Ποιοι αριθμοί λέγονται πρώτοι και ποιοι σύνθετοι ;

Απάντηση: Πρώτοι αριθμοί λέγονται οι αριθμοί που δεν έχουν άλλους διαιρέτες εκτός από τον εαυτό τους και τη μονάδα. Σύνθετοι αριθμοί λέγονται οι αριθμοί που δεν είναι πρώτοι.

ΣΧΟΛΙΟ: Δύο αριθμοί  $a, \beta$  λέγονται *πρώτοι μεταξύ τους*, όταν έχουν ΜΚΔ το 1.

**Διαιρετότητα**

α) Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του, και κάθε φυσικός αριθμός που διαιρείται από έναν άλλο φυσικό, είναι πολλαπλάσιό του.

β) Αν ένας αριθμός διαιρεί έναν άλλον, τότε θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του.

γ) Αν ένας αριθμός διαιρεί δύο άλλους αριθμούς, τότε θα διαιρεί και το άθροισμά τους και την διαφορά τους.

**Κριτήρια διαιρετότητας**

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με

το 10 αν τελειώνει σε 0

το 100 αν τελειώνει σε 00

το 1000 αν τελειώνει σε 000

το 2 αν τελειώνει σε 0, 2, 4, 6, 8 (ζυγός)

το 5 αν τελειώνει σε 0 ή 5

το 3 αν το **άθροισμα των ψηφίων του** είναι 3 ή 6 ή 9

το 9 αν το **άθροισμα των ψηφίων του** είναι 9

το 4 αν τα δύο τελευταία ψηφία του είναι αριθμός που διαιρείται με το 4

το 25 αν τα δύο τελευταία ψηφία του είναι αριθμός που διαιρείται με το 25

### Μεθοδολογίες – Λυμένα παραδείγματα

Ποιες από τις παρακάτω ισότητες παριστάνουν Ευκλείδειες διαιρέσεις;

- ο  $50 = 6 \cdot 7 + 8$  δεν είναι γιατί  $8 > 6$  και  $8 > 7$  άρα δεν γίνεται να είναι υπόλοιπο
- ο  $42 = 5 \cdot 8 + 2$  είναι Ευκλείδεια διαίρεση με  $\delta=5$  ή  $\delta=8$ , αφού το 2 είναι πιο μικρό
- ο  $0 = 7 \cdot 0 + 0$  είναι Ευκλείδεια διαίρεση με  $\delta=7$
- ο  $72 = 9 \cdot 8$  είναι Ευκλείδεια διαίρεση, εννοείται ότι το υπόλοιπο είναι 0
- ο  $97 = 18 \cdot 5 + 7$  είναι Ευκλείδεια διαίρεση με  $\delta=18$ , αφού  $7 < 18$

2. Σε μια διαίρεση ο διαιρέτης είναι 6. Ποιο μπορεί να είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης;

Το υπόλοιπο είναι πάντα μικρότερο από τον διαιρέτη.

Άρα μπορεί να είναι: 0, 1, 2, 3, 4 ή 5

3. Τι μέρα θα είναι σε 250 μέρες από σήμερα;

Ας υποθέσουμε ότι σήμερα είναι Δευτέρα.

Οι μέρες επαναλαμβάνονται ανά 7.

Οπότε: Διαιρούμε το 250 με το 7

$$\begin{array}{r|l}
 250 & 7 \\
 -21 & \text{ολόκληρες εβδομάδες} \\
 \hline
 40 & \\
 -35 & \text{μέρες που περισσεύουν} \\
 \hline
 5 & \text{Άρα θα είναι: Δευτέρα + 5 μέρες = Σάββατο}
 \end{array}$$

4. Αν ένας αριθμός διαιρεθεί με το 9 δίνει ηλίκο 11 και υπόλοιπο 7. Ποιος είναι ο αριθμός;

Έχουμε  $\delta = 9$   $\pi = 11$   $\upsilon = 7$  και ψάχνουμε τον Διαιρετέο.

Ταυτότητα:  $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$

$$9 \cdot 11 + 7$$

$$99 + 7 = 106. \quad \text{άρα είναι το 106}$$

5. Να αναλύσεις το 120 σε γινόμενο πρώτων αριθμών

Διαιρούμε το 120 διαδοχικά με πρώτους αριθμούς, μέχρι να φτάσουμε στο 1

Επομένως:  $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$   
 ή αλλιώς:  $120 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$

6. Να βρεις το ΕΚΠ και το ΜΚΔ των αριθμών 18, 90 και 120

1. Αναλύω τους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων
2. Διαγράφω όποιον διαιρώ, αφήνω ίδιο όποιον δεν διαιρώ

<del>18</del>	<del>120</del>	<del>90</del>	2	$\text{ΜΚΔ} = 2 \cdot 3 = 6$ (μόνο όσοι είναι κοινοί σε
9	<del>60</del>	45	2	
9	<del>30</del>	45	2	$\text{ΕΚΠ} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 360$
<del>9</del>	<del>15</del>	<del>45</del>	3	
3	5	<del>15</del>	3	(όλοι οι πρώτοι παράγοντες)
1	<del>5</del>	<del>5</del>	5	
1	1	1		

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

**1** Για καθεμία από τις παρακάτω ισότητες, να ελέγξεις αν παριστάνουν ταυτότητες Ευκλείδειας διαίρεσης. Αν ναι, να γράψεις μια διαίρεση είναι. Αν όχι, να αιτιολογήσεις την απάντησή σου.

- $41 = 5 \cdot 7 + 6$
- $65 = 7 \cdot 0 + 65$
- $20 = 2 \cdot 9 + 2$
- $120 = 12 \cdot 10$
- $39 = 5 \cdot 6 + 9$
- $14 = 25 \cdot 0 + 14$
- $125 = 12 \cdot 10 + 5$

**2** Να εκτελέσεις την Ευκλείδεια διαίρεση  $673:11$  και να γράψεις την ταυτότητα της.

**3** Να εκτελέσεις την Ευκλείδεια διαίρεση  $7231:4$  και να γράψεις την ταυτότητα της.

**4** Σε μια διαίρεση με το 7, ποιο μπορεί να είναι το υπόλοιπο;

**5** Σε μια διαίρεση, ο διαιρέτης είναι 4 και το ηλίκο 5. Ποιοι είναι οι πιθανοί διαιρετέοι;

**6** Σε μια διαίρεση, ο διαιρέτης είναι 4 και το ηλίκο είναι διπλάσιο από το υπόλοιπο. Ποιοι είναι οι πιθανοί διαιρετέοι;

**7** Ένας αριθμός διαιρούμενος με το 4 δίνει ηλίκο 11 και αφήνει υπόλοιπο 3. Ποιος είναι αυτός ο αριθμός;

**8** Σε μια διαίρεση με το 7, το ηλίκο είναι 12 και το υπόλοιπο 4. Ποιος είναι ο Διαιρέτης;

**9** Ένας αριθμός διαιρούμενος με το 6 δίνει ηλίκο 15 και αφήνει υπόλοιπο 1. Ποιος είναι αυτός ο αριθμός;

**10** Αν σήμερα είναι Τετάρτη, τι μέρα θα είναι σε 291 μέρες από σήμερα;

**11** Αν σήμερα είναι Σάββατο, τι μέρα θα είναι σε 434 μέρες από σήμερα;

**12** Κύκλωσε τους πρώτους αριθμούς:

22      29      51      121      123

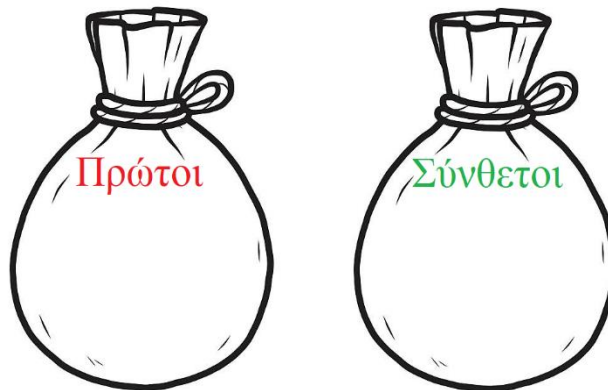
49    2      14      1      589348

**13** Να αναλύσεις τον αριθμό 440 σε γινόμενο πρώτων αριθμών.

**14** Να αναλύσεις τους αριθμούς 180 και 120 σε γινόμενο πρώτων αριθμών. Στη συνέχεια να βρεις το ΜΚΔ και το ΕΚΠ αυτών.

**15** Να βάλεις κάθε αριθμό στο κατάλληλο τσουβάλι.

5 8 9 10 13 19 21 22 23 24 25 27 29 30 140



**16** Να βρεις το ΜΚΔ και το ΕΚΠ των αριθμών:

- 200 και 300
- 210 και 21
- 200 και 45
- 60, 90 και 150

**17** Συμπλήρωσε το ψηφίο που λείπει ώστε :

- i. ο αριθμός 45\_61 να διαιρείται με το 3
- ii. ο αριθμός 123\_8 να διαιρείται με το 9
- iii. ο αριθμός 1562\_ να διαιρείται με το 5 αλλά **και** με το 4
- iv. ο αριθμός 7917\_ να διαιρείται με το 5 αλλά **και** με το 25
- v. ο αριθμός 6141\_ να διαιρείται με το 2 αλλά **και** με το 5

**18** Να συμπληρώσεις τον αριθμό, ώστε να είναι πολλαπλάσιο **και** του 2 **και** του 5 **και** του 9: 458\_7\_

**19** Ποιοι από τους αριθμούς 741, 1536, 553 διαιρούνται με το 3;

**20** Ποιοι από τους αριθμούς 5481, 648, 1113 διαιρούνται με το 9;